Şimleu Silvaniei, 17 Noiembrie, 2012

Concursul Interjudeţean de Matematică "Teodor Topan"
Ediţia a VII-a

CLASA A XII-A

Problema 1 *a) Determinaţi toate funcţiile* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *care admit o primitivă* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *astfel încât* $F(x)\sin(x) \leq f(x)\cos(x)$*, pentru orice* $x \in \mathbb{R}$.

b) Determinaţi funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *care admit o primitivă* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *care satisface proprietatea* $f(x)\cos(x) \geq F(x)\sin(x) + \cos(2x)$*, oricare ar fi* $x \in \mathbb{R}$.

Problema 2 *Fie* $(G, \cdot)$ *un grup şi e elementul neutru. Să se arate că următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

i) Orice parte stabilă a lui G *este subgrup a lui* G.

ii) Pentru orice $x \in G$*, există* $k \in \mathbb{N}^*$ *astfel încât* $x^k = e$.

Problema 3 *Fie* $(G, \cdot)$ *un grup finit şi* $A \subset G$ *o submulţime. Demonstraţi că dacă* $card(A) > \frac{1}{2}card(G)$*, atunci oricare ar fi* $g \in G$ *există* $a_1, a_2 \in A$ *astfel încât* $g = a_1 \cdot a_2$.

Problema 4 *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *o funcţie continuă astfel încât există* $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ *cu proprietatea că* $f(a) \cdot f(b) < 0$. *Să se demonstreze că oricare ar fi* $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$*, există o progresie aritmetică* $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ *astfel încât* $\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = 0$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare problemă este notată cu 7 puncte. Timp de lucru: *3 ore*.