OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
9 FEBRUARIE 2013
CLASA a VI-a
Bareme

Subiectul 1.

a. $a = 2^{2n+2} \cdot 7^{n+3} + 11 \cdot 2^{2n+5} \cdot 7^{n} + 2^{2n} \cdot 7^{n+3} - 27 \cdot 2^{2n+1} \cdot 7^{n}$

$= 2^{2n} \cdot 2^{2} \cdot 7^{n} \cdot 7^{3} + 11 \cdot 2^{2n} \cdot 2^{5} \cdot 7^{n} + 2^{2n} \cdot 7^{n} \cdot 7^{3} - 27 \cdot 2^{2n} \cdot 2^{1} \cdot 7^{n}$

$= 2^{2n} \cdot 7^{n} \cdot (2^{3} \cdot 7^{3} + 11 \cdot 2^{5} + 7^{3} - 27 \cdot 2^{1})$

$= 2^{2n} \cdot 7^{n} \cdot (4 \cdot 343 + 11 \cdot 32 + 343 - 54)$

$= 2^{2n} \cdot 7^{n} \cdot 2013$

Deci a se divide cu 2013 ………………..3p.

b.

Fie d – divizor comun al nr. a si b

$d / 21^{n} \cdot 3 + 4 \Rightarrow d / 21^{n+1} + 28$

$d/21^{n} \cdot 7+6 \Rightarrow d/ 21^{n+1} +18 \Rightarrow d/10 \Rightarrow d \in \{1, 2, 5, 10\}$ …………………………..2p

u(a)=7, u(b)=3 $\Rightarrow$ d=1 …………………………………………….................2p

Subiectul 2.

Notez cu x lungimea de drum pe care prima echipă o lucrează în plus în fiecare zi faţă de ziua precedentă.

Echipa 1 construieşte: 1 km în prima zi, (1+x)km a doua zi, (1+2x)km în a treia zi, …, (1+59x)km în a 60-a zi $\Rightarrow 1 + 59x = 3 \Rightarrow x = \frac{2}{59}$km

Lungimea de drum construită de prima echipă este:

$$1 + 1 + \frac{2}{59} + 1 + 2 \cdot \frac{2}{59} + \cdots + 1 + 59 \cdot \frac{2}{59} = 60 + \frac{2}{59}(1 + 2 + \cdots + 59)$$

$= 60 + \frac{2}{59} \cdot 59 \cdot 60 : 2 = 120km$ ……………..… 3p.

Notez cu y lungimea de drum pe care a doua echipă o lucrează în minus în fiecare zi faţă de ziua precedentă.

Echipa 2 construieşte: 4 km în prima zi, (4–x)km a doua zi, (4–2x)km în a treia zi, …………...,
(4–59x)km în a 60-a zi. $\Rightarrow 4 - 59x = 1 \Rightarrow x = \frac{3}{59}$km

Lungimea de drum construită de a doua echipă este:

$$4 + 4 - \frac{3}{59} + 4 - 2 \cdot \frac{3}{59} + \cdots + 4 - 59 \cdot \frac{3}{59} = 4 \cdot 60 - \frac{3}{59}(1 + 2 + \cdots + 59)$$

$= 4 \cdot 60 - \frac{3}{59} \cdot 59 \cdot 60 : 2 = 150km$ ………………… 3p.

Lungimea autostrăzii 120+150=270 km. ………………… 1p.

Subiectul 3.

Consider că pe [BA – [AB] sunt situate k puncte notate M_k, iar pe [AB – [AB] sunt situate 2013 – k puncte notate M_{2013-k}.

Notam cu S_1 suma distantelor de la A la cele 2013 puncte.

$S_1 = AM_1 + AM_2 + ... + AM_k + AM_{k+1} + AM_{k+2} + ... + AM_{2013}$

$S_1 = AM_1 + AM_2 + ... + AM_k + AB + BM_{k+1} + AB + BM_{k+2} + ... + AB + BM_{2013}$ 2p

$S_1 = AM_1 + AM_2 + ... + AM_k + BM_{k+1} + BM_{k+2} + ... + BM_{2013} + (2013 - k)\cdot AB$ 2p

Notam cu S_2 suma distantelor de la B la cele 2013 puncte.

$S_2 = BM_1 + BM_2 + ... + BM_k + BM_{k+1} + BM_{k+2} + ... + BM_{2013}$ si analog

$S_2 = AM_1 + AM_2 + ... + AM_k + BM_{k+1} + BM_{k+2} + ... + BM_{2013} + k\cdot AB$ 2p

Daca $S_1 = S_2 \Rightarrow (2013 - k)\cdot AB = k\cdot AB \Rightarrow 2k = 2013$ imposibil $\Rightarrow S_1 \neq S_2$ 1p

Subiectul 4.

a) - $\sphericalangle BAM \equiv \sphericalangle CAM \equiv \sphericalangle CAP \equiv \sphericalangle PAD$ 2p

- $[AM] \equiv [AP]$ 1p
- $ME \perp AB, PQ \perp AD, ME = PQ$ 1p

b) - $MP \cap AC = \{O\}$

- $\Delta MOC \equiv \Delta POC (CC) \Rightarrow \sphericalangle MCO \equiv \sphericalangle PCO$ 2p
- $\Delta BAC \equiv \Delta DAC (ULU) \Rightarrow [AB] \equiv [AC]$ 1p

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
9 FEBRUARIE 2013

CLASA a VI-a

Subiectul 1.

a. Să se arate că numărul $a = 2^{2n+2} \cdot 7^{n+3} + 11 \cdot 2^{2n+5} \cdot 7^{n} + 2^{2n} \cdot 7^{n+3} - 27 \cdot 2^{2n+1} \cdot 7^{n}$ este divizibil cu 2013, oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$.

b. Aflaţi cel mai mare divizor comun al numerelor $a = 3^{n+1} \cdot 7^{n} + 4$ şi $b = 3^{n} \cdot 7^{n+1} + 6$, unde n este număr natural.

(G.M. 11- 2012)

Subiectul 2.

Autostrada dintre localitățile A și B a fost construită de două echipe de muncitori în 60 de zile. Prima echipă începe din A și execută în prima zi 1 km, apoi zilnic cu o aceeaşi lungime mai mult decât ziua precedentă, până în ultima zi când execută 3 km. A doua echipă începe din B, face în prima zi 4 km apoi zilnic cu o aceeaşi lungime mai puțin decât ziua precedentă, până în ultima zi când execută 1 km. Care este lungimea autostrăzii?

Subiectul 3.

Pe dreapta d se iau punctele A şi B, iar pe AB–[AB] se consideră 2013 puncte distincte. Să se arate că suma distanţelor de la punctul A la cele 2013 puncte este diferită de suma distanţelor de la punctul B la cele 2013 puncte.

(G.M. 9- 2009)

Subiectul 4.

Triunghiurile ABC şi ADC sunt situate în semiplane diferite faţă de dreapta AC. Fie punctele M şi P, $M \in (BC)$, $P \in (DC)$. Fiecare dintre măsurile unghiurilor $\sphericalangle BAM, \sphericalangle MAC, \sphericalangle CAP, \sphericalangle PAD$ este media aritmetică a măsurilor celorlalte trei unghiuri, iar $AC \perp MP$. Demonstraţi că:

a) Distanţa de la M la AB este egală cu distanţa de la P la AD.

b) $[AB] \equiv [AD]$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii
Timp de lucru: 3 ore