OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
9 FEBRUARIE 2013

CLASA a VII-a
Bareme

Subiectul 1.

1. a) $b=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+...+\frac{1}{2014}$ 1p

$a+b=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)+...+\left(\frac{2013}{2014}+\frac{1}{2014}\right)=1+1+...+1=1007$ 2p

$\frac{a+b}{2}=\frac{1007}{2}$ 1p

b) x = $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{3}\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)}{\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{7}}=\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)\left(1+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{7}}=1+\sqrt{3}$ 2p

Obţinem x este între 2 şi 3 ....1p

Subiectul 2.

Se consideră $E(m;n)=\sqrt{3\cdot 5^m+25^n}$, unde $m,n\in\mathbb{N}$.

a) Să se arate că $E(2013;1006)\in\mathbb{Q}$ şi $E(1006;2013)\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

b) Arătaţi că există o infinitate de perechi $(m;n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ astfel încât $E(m;n)\in\mathbb{Q}$.

c) Arătaţi că există o infinitate de perechi $(m;n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ astfel încât $E(m;n)\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

a) $E(2013;1006)=\sqrt{3\cdot 5^{2013}+25^{1006}}=\sqrt{5^{2012}(3\cdot 5+1)}=\sqrt{16\cdot 5^{2012}}=4\cdot 5^{1006}\in\mathbb{Q}$. …1p.

$E(1006;2013)=\sqrt{3\cdot 5^{1006}+25^{2013}}=\sqrt{5^{1006}\left(3+5^{3020}\right)}=5^{503}\sqrt{3+5^{3020}}$

$U\left(3+5^{3020}\right)=8\Rightarrow 3+5^{3020}$ nu este pătrat perfect deci $E(1006;2013)\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ …2p.

b) Considerând $m=2n+1$ obţinem

$E(m;n)=\sqrt{3\cdot 5^{2n+1}+5^{2n}}=\sqrt{5^{2n}(3\cdot 5+1)}=5^n\cdot 4\in\mathbb{Q}$.

Există o infinitate de perechi $(m;n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, cu $m=2n+1$ …2p.

c) Fie $m=2k<2n, k\in\mathbf{N}$ şi obţinem $E(m;n)=\sqrt{5^{2k}\left(3+5^{2n-2k}\right)}=5^k\sqrt{3+5^{2n-2k}}$

$U\left(3+5^{2n-2k}\right)=8\Rightarrow 3+5^{2n-2k}$ nu este pătrat perfect.

Există o infinitate de perechi $(m;n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, cu $m=2k<2n, k\in\mathbf{N}$ …2p.

Subiectul 3

Fie patrulaterul ABCD cu BD∩AC={O}, O fiind mijlocul segmentului [BD]. Paralelele duse prin O la BC si CD intersectează pe AB şi AD in punctele P si respectiv Q.

a. Demonstraţi că patrulaterul ABCD este paralelogram daca si numai daca BD=2PQ.

b. Arătaţi că, orice 4 numere naturale, nedivizibile cu 7, am pune în vârfurile patrulaterului, există întotdeauna cel puţin o latură sau o diagonală pentru care suma sau diferenţa numerelor de la capetele ei să fie un număr divizibil cu 7.

a.

"=>" ABCD paralelogram => [AD]≡[BC].

In △ABC si △ADC , [OP] si, respectiv [OQ] sunt linii mijlocii

=> in △ABD , [QP] linie mijlocie =>BD=2PQ … 2p.

"<=" Aplicând teorema lui Thales in △ABC si△ADC, avem:

$\frac{AP}{PB}=\frac{AO}{OC}$, respective $\frac{AQ}{QD}=\frac{AO}{OC}$ => $\frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{QD}$ => PQ ∥BD. …1p.

Cum BD=2PQ => [PQ] linie mijlocie => $\frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{QD}=\frac{AO}{OC}$ =1 => [AO]≡[OC]

Din [BO]≡[OD] si[AO]≡[OC] => ABCD paralelogram … 1p.

b.

Fiecare număr este legat de celelalte 3 numere ori prin latură, ori prin diagonală.

Considerăm:

A mulţimea ce conţine numerele naturale de forma 7k+1 şi 7k+6

B mulţimea ce conţine numerele naturale de forma 7k+2 şi 7k+5

C mulţimea ce conţine numerele naturale de forma 7k+3 şi 7k+4 … 1p.

Fiind 4 numere (nedivizibile cu 7), există cel puțin 2 dintre ele care sunt din aceeași mulțime. Dacă sunt de același tip atunci diferența lor este divizibilă cu 7, dacă nu atunci suma lor este divizibilă cu 7. … 2p.

Subiectul 4

In trapezul dreptunghic ABCD, AB||CD, m(∢A) = 90°, AB = 2 DC, diagonala BD intersectează înălțimea CE în punctul O. Dacă M ∈ (OB), paralela prin O la AB intersectează dreapta CM în P, iar dreptele ME și AD se intersectează în N demonstrați că:

a) triunghiul CEP este isoscel;

b) semidreapta CE este bisectoarea unghiului NCM.

Prof. Ivan Ion şi Mihuţ Ioan
Piatra Neamţ

a) Δ OEB ≡ ΔOCD……………………………………………………………..1p

OP mediatoarea segmentului CE………………………………………………..1p

FinalizareΔMCD: OP ∥ DC $\Rightarrow \frac{MO}{OD}=\frac{MP}{PC}$ ……………………………………..1p

ΔMDN: OE ∥ DN $\Rightarrow \frac{OM}{OD}=\frac{ME}{EN}$ …………………………………………....1p

In ΔMCN din $\frac{MP}{PC}=\frac{ME}{EN}\Rightarrow$ PE ∥ CN………………………………..……..1p

∢PEC ≡ ∢ECN, ∢PEC ≡ ∢ECP și finalizare……………………………..1p

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
9 FEBRUARIE 2013
CLASA a VII-a

Subiectul 1.

a. Se consideră numerele: $a=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\ldots+\frac{2013}{2014}$ şi $b=\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{1007}}{2}$.
Calculaţi media aritmetică a numerelor a şi b.

b. Aflaţi între ce numere întregi consecutive este numărul

$$x=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}+\sqrt{15}+\sqrt{21}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{7}}.$$

Subiectul 2.

Se consideră $E(m;n)=\sqrt{3\cdot 5^m+25^n}$, unde $m,n\in\mathbb{N}$.

a) Să se arate că $E(2013;1006)\in\mathbb{Q}$ şi $E(1006;2013)\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

b) Arătaţi că există o infinitate de perechi $(m;n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ astfel încât $E(m;n)\in\mathbb{Q}$.

c) Arătaţi că există o infinitate de perechi $(m;n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ astfel încât $E(m;n)\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

Subiectul 3.

Fie patrulaterul ABCD cu BD∩AC={O}, O fiind mijlocul segmentului [BD]. Paralelele duse prin O la BC si CD intersectează pe AB şi AD in punctele P si respectiv Q.

a. Demonstraţi că patrulaterul ABCD este paralelogram daca si numai daca BD=2PQ.

b. Arătaţi că, orice 4 numere naturale, nedivizibile cu 7, am pune în vârfurile patrulaterului, există întotdeauna cel puţin o latură sau o diagonală pentru care suma sau diferenţa numerelor de la capetele ei să fie un număr divizibil cu 7.

Subiectul 4.

In trapezul dreptunghic ABCD, AB||CD, m($\prec$A) = 90^o, AB = 2 DC, diagonala BD intersectează înălțimea CE în punctul O. Dacă M $\in$ (OB), paralela prin O la AB intersectează dreapta CM în P, iar dreptele ME și AD se intersectează în N demonstrați că:

a) triunghiul CEP este isoscel;

b) semidreapta CE este bisectoarea unghiului NCM.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii
Timp de lucru: 3 ore

Inspectoratul Şcolar Judeţean Neamţ
Piatra Neamţ, jud. Neamţ
str. Lt. Drăghiescu, Nr.4A
tel. 0233/214860,fax 0233/215807
e-mail: isj_neamt@yahoo.com