Colegiul Naţional „Mircea cel Bătrân”, Râmnicu-Vâlcea

Concursul Interjudeţean
„Mathematica – modus vivendi”
Ediţia a X-a, 23 februarie 2013
CLASA a VII-a

1. Un număr natural x are suma cifrelor egală cu $n^3+2n+5, n\in\mathbb{N}$.

a. Arătaţi că $n^3+2n+5=(n-1)n(n+1)+3(n+1)+2$.

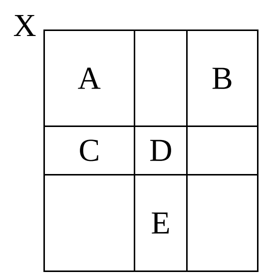
b. Demonstraţi că numărul $\sqrt{x}$ este iraţional.

Prof. univ. dr. Dumitru Acu, Sibiu

2. a. Arătaţi că numărul $2^{2010}-1$ este divizibil cu 9.

b. Arătaţi că numărul $1+2^{2013}$ este divizibil cu 9.

Prof. Elena Drăgan, Rm. Vâlcea



3. În figura alăturată, dreptunghiul *X* este împărţit în dreptunghiurile *A*, *B*, *C*, *D*, *E* cu ariile de 3 cm^2, 9 cm^2, 1 cm^2, 2 cm^2 şi respectiv 8 cm^2.

Aflaţi aria dreptunghiului *X*.

Prof. Marcel Teleucă, Chişinău

4. Fie pătratul *ABCD*, punctul $M\in AB$ astfel încât $B\in(AM)$. Dacă punctul $N\in(MC)$ şi $BN\cap MD=\{O\}$ demonstraţi că:

$$\frac{OB}{ON}=\frac{AM}{CD}\Leftrightarrow m(\sphericalangle NBM)=45^0.$$

Prof. Constantin Bărăscu, Râmnicu-Vâlcea

Notă: Timp de lucru 3 ore.
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte

Colegiul Naţional „Mircea cel Bătrân”, Râmnicu-Vâlcea

Concursul Interjudeţean
„Mathematica – modus vivendi”
Ediţia a X-a, 23 februarie 2013
CLASA a VI-a

1. a. În expresia $689*690*691*692=0$ înlocuiţi steluţele cu simbolurile $+$ sau $-$ astfel ca egalitatea să fie adevărată.
b. În expresia $1*2*3*...*2013=1$ se pot înlocui toate steluţele cu simbolurile $+$ sau $-$ astfel ca egalitatea să fie adevărată? Justificaţi!

Prof. Gheorghe Ciucă, Râmnicu-Vâlcea

2. a. Arătaţi că dacă fracţiile de forma $\dfrac{4n+15}{3n+7}, n\in\mathbb{N}$ sunt reductibile, atunci ele se simplifică numai prin 17.
b. Pentru ce valoare naturală a lui n fracţia rezultată după simplificare este de forma $\dfrac{p+5}{p}, p\in\mathbb{N}^*$?
c. Găsiţi cel mai mic număr natural n de două cifre pentru care fracţia este reductibilă.

Prof. Leon Genoiu, Râmnicu-Vâlcea

3. Fie mulţimea A formată din 11 numere naturale consecutive.
a. Dacă mulţimea A se poate scrie ca o reuniune de două mulţimi disjuncte atfel încât suma elementelor din prima mulţime să fie egală cu suma elementelor din a doua mulţime, demonstraţi că cel mai mic element din A este număr impar.
b. Determinaţi mulţimea A dacă suma celor mai mici 6 elemente este egală cu suma celor mai mari 5 elemente ale sale.
c. Demonstraţi că mulţimea A nu se poate scrie ca o reuniune de două submulţimi disjuncte atfel încât produsul elementelor din prima submulţime să fie egal cu produsul elementelor din a doua submulţime.

Prof. Constantin Bărăscu, Râmnicu-Vâlcea

4. Fie M mijlocul laturii AB a triunghiului ABC. Punctele $P,Q\in CM$ astfel încât $CQ=2PM$. Dacă $m\sphericalangle APM=90^0$ şi $BT\perp CM, M\in CT$ demonstraţi că:
a. $AP=BT$
b. $BQ=AC$.

Prof. Florin Smeureanu, Râmnicu-Vâlcea

Notă: Timp de lucru 2 ore.
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.

Colegiul Naţional „Mircea cel Bătrân”, Râmnicu-Vâlcea

Concursul Interjudeţean
„Mathematica – modus vivendi”
Ediţia a X-a, 23 februarie 2013
CLASA a V-a

1. a. Dacă *a* şi *b* sunt două numere naturale astfel încât suma lor este număr natural par, găsiţi paritatea numerelor *a* şi *b*.
b. Diferenţa a două numere naturale a fost înmulţită cu produsul lor. Se poate obţine în acest fel numărul 201120122013? Justificaţi!

Prof. Elena Drăgan, Râmnicu-Vâlcea

2. a. Arătaţi că $28 = 1^2 + 3^3$, iar $28^2 = 21^2 + 7^3$.
b. Arătaţi că numerele 28^{6n+1} şi 28^{6n+2}, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$ se pot scrie ca suma dintre un număr natural pătrat perfect şi un număr natural cub perfect.

Prof. Elena Drăgan, Râmnicu-Vâlcea

3. Fie mulţimea $A = \{a \in \mathbb{N} \mid a$ împărţit la 2013 dă câtul 1 şi restul nenul$\}$.
a. Determinaţi mulţimea *A*.
b. Calculaţi suma elementelor mulţimii *A*.
c. Găsiţi două submulţimi *B* şi *C* disjuncte ale mulţimii *A* astfel încât $B \cup C = A$ şi suma elementelor din *B* să fie egală cu suma elementelor din *C*.

Prof. Florin Smeureanu, Râmnicu-Vâlcea

4. a. Fiind date numerele 391, 624 şi 857, arătaţi că unul dintre ele este media aritmetică a celorlalte două.
b. În pătrăţelele unui tabel cu 3 linii şi 3 coloane sunt scrise toate cifrele de la 1 până la 9.
Dacă citim cifrele de pe fiecare linie de la stânga la dreapta şi de pe fiecare coloană de sus în jos vom găsi 6 numere de câte trei cifre.
Completaţi un astfel de tabel ştiind că numărul de pe prima linie este egal cu media aritmetică a numerelor de pe linia a doua şi a treia, iar numărul de pe coloana a treia este egal cu media aritmetică a numerelor de pe prima şi a doua coloană.

Prof. Marcel Teleucă, Chişinău

Notă: Timp de lucru 2 ore.
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte

Colegiul Naţional „Mircea cel Bătrân”, Râmnicu-Vâlcea

Concursul Interjudeţean

„Mathematica – modus vivendi”

Ediţia a X-a, 23 februarie 2013

CLASA a VIII-a

1. a. Găsiţi 2013 numere naturale consecutive astfel încât suma lor să fie cub perfect.

b. Dacă $a,b,c\in\mathbb{Z}$ şi $x=2013^{a+b-2c}$, $y=2013^{c+b-2a}$, $z=2013^{a+c-2b}$, calculaţi $x\cdot y\cdot z$ şi demonstraţi că $\sqrt{\dfrac{1}{1+x+xy}}+\sqrt{\dfrac{1}{1+y+yz}}+\sqrt{\dfrac{1}{1+z+xz}}\le 2$.

Prof. Constantin Bărăscu,Râmnicu-Vâlcea

Prof. Elena Drăgan, Râmnicu-Vâlcea

2. Fie *a* şi *b* numere reale date. Să se afle numerele reale x,y,z,u,v pentru care

$$\sqrt{x-a}+\sqrt{y-b}+\sqrt{z+a+2}+\sqrt{u+b+2}+\sqrt{v-8}=\frac{x+y+z+u+v+1}{2}.$$

Prof. univ. dr. Dumitru Acu, Sibiu

3. În tetraedrul regulat *VABC* se ştie că $VO\perp\ ABC$, iar *D* şi *E* sunt mijloacele a două muchii opuse, *D* fiind pe baza ABC.

a. Demonstraţi că VO şi DE sunt drepte coplanare.

b. Dacă $VO\cap DE=\ M$, arătaţi că $VM=3\cdot MO$.

c. Dacă $d\ M, VAC\ =MN$, demonstraţi că $MN=MO$ şi aflaţi aria tetraedrului ştiind că $ON=2$ cm.

Prof. Leon Genoiu, Râmnicu-Vâlcea

4. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic. În tetraedrul determinat de punctele A,C,D',B', printr-un punct oarecare $M\in\ AC$ construim un plan α paralel cu CB' şi AD', plan ce intersectează CD', $D'B'$ respectiv AB' în punctele *N, P* şi *Q*.

a. Demonstraţi că patrulaterul *MNPQ* este paralelogram.

b. Calculaţi P_{MNPQ} în funcţie de *L, l şi h* dimensiunile paralelipipedului $ABCDA'B'C'D'$.

c. Prin punctul $E\in\ AC$ construim un plan β paralel cu AB' şi CD' care intersectează AD', $D'B'$, CB' în punctele *F, G, H,* iar prin punctul $T\in\ AB'$ construim un plan γ paralel cu $D'B'$ şi CA care intersectează CB', CD', AD' în punctele *L, U, V*. Dacă $P_{MNPQ}=P_{EFGH}=P_{TLUV}$ demonstraţi că $ABCDA'B'C'D'$ este cub.

Prof. Constantin Bărăscu,Râmnicu-Vâlcea

Notă: Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte