Colegiul Naţional „Mircea cel Bătrân”, Râmnicu-Vâlcea

Concursul Interjudeţean „Mathematica – modus vivendi”

Ediţia a X-a, 23 februarie 2013

BAREM CLASA a V-a

1. a. $a+b=$nr. par$\Rightarrow a$ şi b au aceeaşi paritate..3 p

b. $a,\ b=$ nr. pare$\Rightarrow ab\ \ a-b\ =$ nr. par.. 1p

$a,b=$ nr. impare $\Rightarrow ab=$nr. impar, $a-b=$nr. par$\Rightarrow ab\ \ a-b\ =$nr. par......................1p

a,b au parităţi diferite$\Rightarrow ab=$ nr. par, $a-b=$ nr. impar $\Rightarrow ab\ \ a-b\ =$ nr. par........1 p

$ab\ \ a-b\ \neq 201120122013$ care este nr. impar..1 p

Total = 7 puncte

2. a. $28=1+27\ \ A$ ....1 p

$784=441+343\ \ A$ ....2 p

b. $28^{6n+1}=28^{6n}\cdot 28=28^{6n}\ \ 1^2+3^3\ =\ 28^{3n}\ ^2+\ 3\cdot 28^{2n}\ ^3$..2 p

$28^{6n+2}=28^{6n}\cdot 28^2=28^{6n}\ \ 21^2+7^3\ =\ 28^{3n}\cdot 21\ ^2+\ 7\cdot 28^{2n}\ ^3$.......................................2 p

----

Total = 7 puncte

3. a. $a=2013\cdot 1+r, 1\le r\le 2012$ ....1 p

$A=\ \ 2013\cdot 1+1, 2013\cdot 1+2,..., 2013\cdot 1+2012$ ....2 p

b. $S=2013\cdot 2012+\ 1+2+...+2012\ =2013\cdot 3018=6075234$ ....2 p

c. Sumele elementelor din B şi C sunt egale dacă sumele resturilor cu ajutorul cărora se formează elementele lui B şi C sunt egale..1 p

De exemplu:

$B=\ \ 2013\cdot 1+1, 2013\cdot 1+2,..., 2013\cdot 1+503, 2013\cdot 1+1510, 2013\cdot 1+1511,..., 2013\cdot 1+2012$

$C=\ \ 2013\cdot 1+504, 2013\cdot 1+505,..., 2013\cdot 1+1509$ ....1 p

----

Total = 7 puncte

4. a. $624=\ 857+391\ :2$ ....2 p

b.

2	8	5
1	7	4
3	9	6

2	8	5
3	9	6
1	7	4

4	6	5
1	3	2
7	9	8

4	6	5
7	9	8
1	3	2

6	4	5
9	7	8
3	1	2

6	4	5
3	1	2
9	7	8

8	2	5
7	1	4
9	3	6

8	2	5
9	3	6
7	1	4

3	9	6
2	7	4
5	1	8

4	8	6
2	5	3
7	1	9

6	2	4
8	5	7
3	9	1

7	1	4
8	3	6
5	9	2

Total = 7 puncte

Colegiul Naţional „Mircea cel Bătrân”, Râmnicu-Vâlcea

Concursul Interjudeţean „Mathematica – modus vivendi”

Ediţia a X-a, 23 februarie 2013

BAREM CLASA a VI-a

1. a. $689-690-691+692=0$ ....2 p

b. $a- \ a+1 \ - \ a+2 \ + \ a+3 \ =0, a\in\mathbb{N}^*$ ....2 p

$2-3-4+5 \ + \ 6-7-8+9 \ +...+ \ 2010-2011-2012+2013 \ =0$ ....2 p

$1+ \ 2-3-4+5 \ + \ 6-7-8+9 \ +...+ \ 2010-2011-2012+2013 \ =1$ ....1 p

----

Total = 7 puncte

2. a. $d\,|\,4n+15$ şi $d\,|\,3n+7 \Rightarrow d\,| \ 12n+45 \ - \ 12n+28 \ \Rightarrow d\,|\,17 \Rightarrow d\in \ 1,17$ ....3 p

b. $4n+15=17 \ \ p+5$ şi $3n+7=17p \Rightarrow n+8=85 \Rightarrow n=77$ ....2 p

c. $17\,|\,4n+15$ şi $17\,|\,3n+7 \Rightarrow 17\,|\,n+8 \Rightarrow n+8=17K \Rightarrow n=17k-8$, $k\in\mathbb{N}^*$

$k=2\Rightarrow n=26$ ....2 p

Total = 7 puncte

3. a. Fie $a, a+1, a+2, ..., a+10$ elementele lui *A*.. ..1 p

$a+ \ a+1 \ + \ a+2 \ +...+ \ a+10 \ =11 \ a+5 \ =$nr. par...1 p

$a+5=$nr. par$\Rightarrow a=$nr. impar..1 p

b. $a+ \ a+1 \ +...+ \ a+5 \ = \ a+6 \ +...+ \ a+10$ ....1 p

$a=25\Rightarrow A= \ 25, 26, ..., 35$ ....1 p

c. Fie *P* produsul elementelor din *A,* iar P_1 şi P_2 produsele elementelor celor două submulţimi.

Oricum am alege 11 nr. nat. consecutive doar unul dintre ele este divizibil cu 11……..1 p

$P\,\vdots\,11$ şi P_1 sau $P_2\,\vdots\,11 \Rightarrow P_1\neq P_2$ .... 1 p

----

Total = 7 puncte

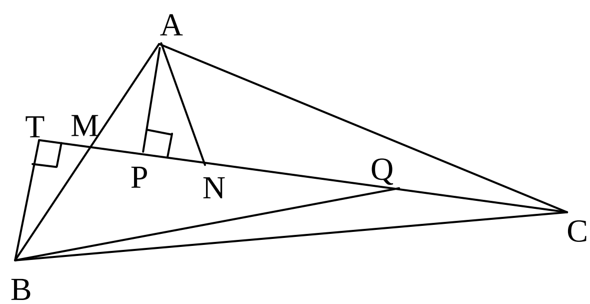
Colegiul Naţional „Mircea cel Bătrân”, Râmnicu-Vâlcea

Concursul Interjudeţean „Mathematica – modus vivendi”

Ediţia a X-a, 23 februarie 2013

BAREM CLASA a VI-a

4. a.



$\Delta AMP \equiv \Delta BMT \Rightarrow AP = BT$ ……………………………………………………………2 p

b. Fie $N \in MC$ astfel încât $MP = PN = a$ …………………………………………...2 p

$\Delta APM \equiv \Delta APN \Rightarrow AM = AN, m\ \sphericalangle AMP = m\ \sphericalangle ANP = x$ …………………………1 p

$MQ = NC = 2a + NQ, m\ \sphericalangle BMQ = m\ \sphericalangle ANC = 180^0 - x$ …………………………...1 p

$\Delta BMQ \equiv \Delta ANC \Rightarrow BQ = AC$ ……………………………………………………………1 p

----

Total = 7 puncte

Colegiul Naţional „Mircea cel Bătrân”, Râmnicu-Vâlcea

Concursul Interjudeţean „Mathematica – modus vivendi”

Ediţia a X-a, 23 februarie 2013

BAREM CLASA a VII-a

1 a.

$n-1\ n\ n+1\ +3\ n+1\ +2=\ n^2-n\ \ n+1\ +3n+3+2=n^3+n^2-n^2-n+3n+5=n^3+2n+5$

sau utilizarea formulelor de calcul prescurtat..2 p

b. Un număr împărţit la 3 dă acelaşi rest ca şi suma cifrelor sale împărţită la 3.............2 p

$n^3+2n+5=3k+2, k\in\mathbb{N}$...1 p

Un pătrat perfect nu poate fi de forma $3k+2, k\in\mathbb{N}\Rightarrow\sqrt{x}$ este iraţional.....................2 p

----

Total = 7 puncte

2. a. Observăm că $2^6-1\vdots 9$ ………………………………………………………..….1 p

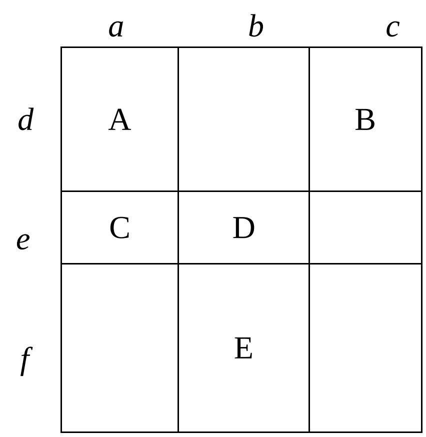
$2^{2010}-1=\ 2^6\ ^{335}-1=\ 63+1\ ^{335}-1=M_{63}\vdots 9$ ……………………………………….3 p

b. $1+2^{2013}=9+2^{2013}-8=9+8\ 2^{2010}-1\ =M_9$ ………………………………………3 p

----

Total = 7 puncte

3. Notăm dimensiunile dreptunghiurilor în care este împărţit *X* cu a,b,c,d,e,f ca în figura alăturată. Exprimând ariile lor găsim:



$ad=3, cd=9, ae=1, be=2, bf=8$...2 p

$c=3a, b=2a\Rightarrow a+b+c=6a$ ....2 p

$f=4e\Rightarrow d+e+f=d+5e$ ....2 p

$A_X=6a\ \ d+5e\ =6ad+30ae=48\text{ cm}^2$..1 p

Total = 7 puncte

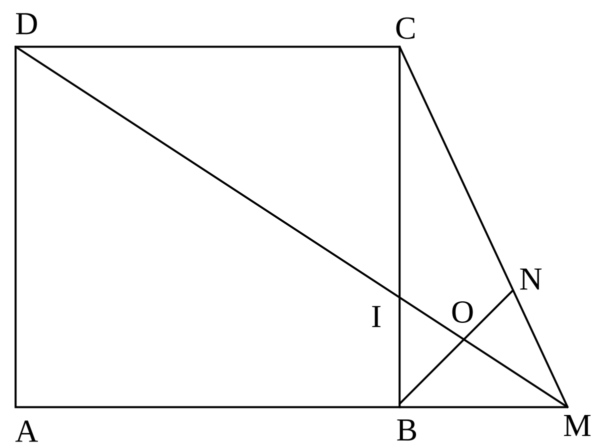
Colegiul Naţional „Mircea cel Bătrân”, Râmnicu-Vâlcea

Concursul Interjudeţean „Mathematica – modus vivendi”

Ediţia a X-a, 23 februarie 2013

BAREM CLASA a VII-a

4.



Aplicând teorema lui Menelaos în ΔBNC cu transversala $I, O, M, I = DM \cap BC$

avem: $\frac{CI}{IB} \cdot \frac{BO}{ON} \cdot \frac{NM}{MC} = 1$ ....2 p

$\Delta DCI \sim \Delta IBM \Rightarrow \frac{CI}{IB} = \frac{DC}{BM}$ ....1 p

„$\Rightarrow$” Înlocuind rapoartele $\frac{CI}{IB}$ şi $\frac{BO}{ON}$ din teorema lui Menelaos găsim $\frac{AM}{BM} = \frac{MC}{NM} \Rightarrow$

$\Rightarrow BN \parallel AC \Rightarrow \sphericalangle NBM \equiv \sphericalangle CAB$ ....2 p

„$\Leftarrow$” Din $\sphericalangle NBM \equiv \sphericalangle CAB \Rightarrow BN \parallel AC \Rightarrow \frac{BM}{AM} = \frac{MN}{CM}$ ....1 p

Înlocuind rapoartele $\frac{CI}{IB}$ şi $\frac{MN}{MC}$ din teorema lui Menelaus găsim $\frac{BO}{ON} = \frac{MA}{DC}$ ....1 p

----

Total = 7 puncte

Colegiul Naţional „Mircea cel Bătrân”, Râmnicu-Vâlcea

Concursul Interjudeţean „Mathematica – modus vivendi”

Ediţia a X-a, 23 februarie 2013

BAREM CLASA a VIII-a

1. a. $n^3 = k+1 + k+2 + ... + k+2013 = 2013\ k+1007$ ....1 p

De exemplu pentru $k = 2013^2 - 1007$ găsim numerele

$2013^2 - 1006, 2013^2 - 1006, ..., 2013^2 + 1006$ ....2 p

b. $x \cdot y \cdot z = 1$..2 p

Din inegalitatea mediilor deducem:

$$\sqrt{\frac{1}{1+x+xy} \cdot 1} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x+xy} + 1\right),$$

$$\sqrt{\frac{1}{1+y+yz} \cdot 1} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+y+yz} + 1\right), \sqrt{\frac{1}{1+z+xz} \cdot 1} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+z+xz} + 1\right).$$

Adunând cele trei inegalităţi membru cu membru şi ţinând cont că

$$\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+xz} = \frac{1}{1+x+xy} + \frac{x}{x+xy+xyz} + \frac{xy}{xy+xyz+x^2yz} =$$

$$= \frac{1}{1+x+xy} + \frac{x}{x+xy+1} + \frac{xy}{xy+1+x} = 1 \text{ găsim :}$$

.. $\sqrt{\frac{1}{1+x+xy}} + \sqrt{\frac{1}{1+y+yz}} + \sqrt{\frac{1}{1+z+xz}} \le \frac{1}{2}\ 1+3\ = 2$ ....2 p

----

Total = 7 puncte

2.

$x - 2\sqrt{x-a} + y - 2\sqrt{y-b} + z - 2\sqrt{z+a+2} + u - 2\sqrt{u+b+2} + v - 2\sqrt{v-8} + 1 = 0$ ......
....2 p

$\sqrt{x-a} - 1^{\ 2} + \sqrt{y-b} - 1^{\ 2} + \sqrt{z+a+2} - 1^{\ 2} + \sqrt{u+b+2} - 1^{\ 2} + \sqrt{v-8} - 1^{\ 2} = 0$ ....
....3 p

$x = a+1, y = b+1, z = -a-1, u = -b-1, v = 9$ ....2 p

Total = 7 puncte

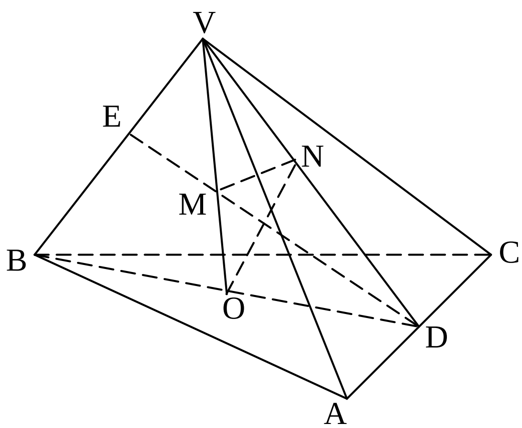
Colegiul Naţional „Mircea cel Bătrân”, Râmnicu-Vâlcea

Concursul Interjudeţean „Mathematica – modus vivendi”

Ediţia a X-a, 23 februarie 2013

BAREM CLASA a VIII-a

3.



a. Fie D şi E mijloacele segmentelor AC respectiv VB . Cum feţele tetraedrului sunt triunghiuri echilaterale $\Rightarrow BD, VD$ înălţimi.

$VO \perp \ ABC \ , VD \perp AC, AC$ şi $OD \subset \ ABC \ \Rightarrow OD \perp AC$, dar

$BD \perp AC \Rightarrow O \in BD \Rightarrow VO \subset \ VBD$. Cum şi $DE \subset \ VBD \ \Rightarrow VO$ şi DE coplanare....2 p

b. Din teorema lui Menelaos în ΔVBO cu transversala

$E, M, D \Rightarrow \frac{VE}{EB} \cdot \frac{BD}{DO} \cdot \frac{OM}{VM} = 1 \Rightarrow \frac{1}{1} \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{OM}{VM} = 1 \Rightarrow MV = 3 \cdot OM$ ....2 p

c. Fie $MN \perp VD, VD \perp AC, OD \perp AC, ND$ şi $AC \subset \ VAC \ \Rightarrow MN \perp \ VAC$ ....0,5 p

DE bisectoarea $\sphericalangle VDB \Rightarrow d \ M, VD \ = d \ M, BD$ ....0,5 p

Dar $\frac{DO}{DB} = \frac{DN}{DV} = \frac{1}{3} \Rightarrow ON \parallel VB \Rightarrow \frac{ON}{VB} = \frac{1}{3} \Rightarrow VB = 6$ cm..1 p

$A_{VABC} = 36\sqrt{3}$ cm^2..1 p

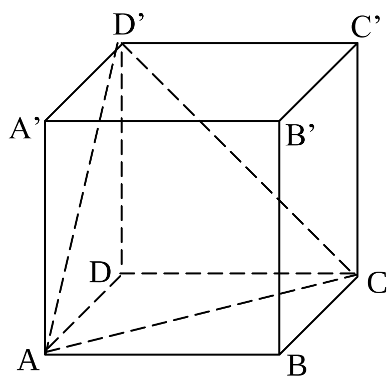
Total = 7 puncte

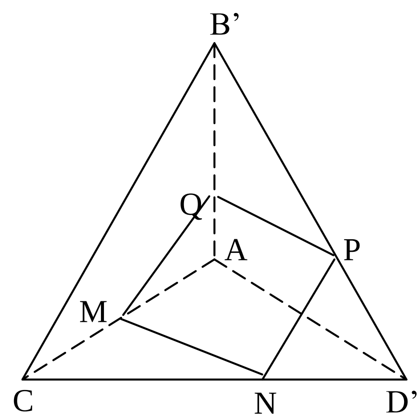
Colegiul Naţional „Mircea cel Bătrân”, Râmnicu-Vâlcea

Concursul Interjudeţean „Mathematica – modus vivendi”

Ediţia a X-a, 23 februarie 2013

BAREM CLASA a VIII-a





4. a.

$CB' \parallel \alpha, CB' \subset ACB'$, $ACB' \cap \alpha = MQ \Rightarrow MQ \parallel CB'$

. Analog $PN \parallel CB'$ şi aplicând tranzitivitatea relaţiei de paralelism $\Rightarrow MQ \parallel PN$ ....1 p

La fel găsim şi $QP \parallel MN$, deci $MNPQ$ paralelogram..1 p

b. $AC = B'D' = \sqrt{L^2 + l^2}, AD' = B'C = \sqrt{h^2 + l^2}, CD' = B'A = \sqrt{h^2 + L^2}$ ....1 p

$\frac{QP}{AD'} = \frac{B'P}{B'D'}$ şi $\frac{PN}{B'C} = \frac{D'P}{D'B'} \Rightarrow QP + PN = AD'$ ....1 p

$P_{MNPQ} = 2AD' = 2\sqrt{h^2 + l^2}$ ....1 p

c. Analog $P_{EFGH} = 2\sqrt{L^2 + h^2}, P_{TLUV} = 2\sqrt{L^2 + l^2}$ ....1 p

$P_{MNPQ} = P_{EFGH} = P_{TLUV} \Rightarrow 2\sqrt{h^2 + l^2} = 2\sqrt{h^2 + L^2} = 2\sqrt{L^2 + l^2} \Rightarrow L = l = h$.................1 p

----

Total = 7 puncte