CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICA „PANAITOPOL”

EDIȚIA a V-A, TULCEA, 23 februarie2013

Soluții orientative şi bareme

Clasa a VII-a

Problema 1.

a) Se consideră numărul numărul $q=\left(1-\sqrt{2}\right)^2+\sqrt{3-2\sqrt{2}}-\left(3-\sqrt{2}\right)$. Arătați că $|\,q\,|\in\mathbb{N}$.

b) Determinați perechile de numere raționale pozitive $(a;b)$, $b\neq 0$, care verifică egalitatea $\sqrt{ab+\sqrt{3}}=\dfrac{a+\sqrt{3}}{\sqrt{b}}$.

Prof. Mircea Fianu, Bucureşti

a) $q=3-2\sqrt{2}+\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}-3+\sqrt{2}=\left\|1-\sqrt{2}\right\|-\sqrt{2}$.	**2p**
$q=\sqrt{2}-1-\sqrt{2}=-1$, deci $\|q\|=1\in\mathbb{N}$.	**1p**
b) Ridicând la pătrat şi aducând la acelaşi numitor egalitatea din enunț devine echivalentă cu $a^2-ab^2+3=\sqrt{3}(b-2a)$.	**2p**
a şi b sunt numere raționale, iar $\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$, rezultă că $b-2a=0$, deci $b=2a$.	**1p**
Substituind, obținem ecuația $4a^3-a^2-3=0$ cu soluția $a=1$. Rezultă $(a;b)=(1;2)$.	**1p**

Problema 2.

Se consideră un număr natural prim *p*.

a) Arătați că, dacă $p>3$, atunci numărul $m=2p^2+1$ este compus;

b) Determinați toate numerele naturale prime *p* cu proprietatea că numărul $m=2p^2+1$ este pătrat perfect.

***

a) Cum *p* este prim cu 3, rezultă că $p^2=3k+1,\ k\in\mathbb{N}^*$.	**2p**
Deci $m=2p^2+1=6k+3=3(2k+1)>3$. Aşadar, *m* este produs de doi factori mai mari decât 1, adică este număr compus.	**1p**
b) Dacă $m=q^2,\ q\in\mathbb{N}^*$, obținem $2p^2+1=q^2$, adică $2p^2=(q-1)(q+1)$.	**2p**
Deoarece membrul stâng al ultimei relații este număr par, iar numerele $q-1,\ q+1$ au aceeaşi paritate, rezultă că ambele sunt pare. Deci membrul drept al egalității este multiplu de 4.	**1p**
Deducem că $p=2$. Într-adevăr, $2\cdot 2^2+1=3^2$	**1p**

Problema 3.
Se consideră numerele reale strict pozitive şi diferite $a_1, a_2, ..., a_{10}$.

Dacă $\frac{1}{\sqrt{a_1}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_3}}+...+\frac{1}{\sqrt{a_{10}}}>\sqrt{39}$, arătați că cel puțin unul dintre numerele $a_1, a_2, ..., a_{10}$ **nu** este natural.

Prof. Mircea Fianu, Bucureşti

Presupunem că toate numerele $a_1, a_2, ..., a_{10}$ sunt naturale. Atunci $S=\frac{1}{\sqrt{a_1}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_3}}+...+\frac{1}{\sqrt{a_{10}}}\le\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{10}}$.	**2p**
Pentru $i=\overline{2,3}$, avem $\frac{1}{\sqrt{i}}<1$, pentru $i=\overline{5,8}$, avem $\frac{1}{\sqrt{i}}<\frac{1}{2}$, iar pentru $i=10$, avem $\frac{1}{\sqrt{10}}<\frac{1}{3}$.	**3p**
Prin urmare, $S<1+2\cdot1+\frac{1}{2}+4\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=6\frac{1}{6}$.	**1p**
Cum $\sqrt{39}<S<6\frac{1}{6}<\sqrt{39}$, obținem contradicție, deci cel puțin unul dintre cele 10 numere **nu** este natural.	**1p**

Problema 4.
Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC în care $AD\perp BC, D\in BC$, $DE\perp AC, E\in AC$, iar $M\in(DE)$ astfel încât $\frac{DC}{DM}=\frac{DB}{EM}$. Demonstrați că $AM\perp BE$.

Prof. Mircea Fianu, Bucureşti

Egalitatea $\frac{DC}{DM}=\frac{DB}{EM}$ este echivalentă cu $\frac{EM}{DM}=\frac{BD}{DC}$. (1)	**1p**
Considerăm punctul $F\in(EC)$ astfel încât $DF \parallel BE$. Conform *teoremei lui Thales* aplicată în triunghiul BEC, avem $\frac{EF}{FC}=\frac{BD}{DC}$. (2)	**2p**
Din (1) şi (2) deducem că $\frac{EF}{FC}=\frac{EM}{DM}$ şi conform *reciprocei teoremei lui Thales* aplicată în triunghiul EDC, obținem $MF \parallel DC$. Cum $DC\perp AD$, rezultă că $FM\perp AD$.	**2p**
În triunghiul ADF, DE şi FM sunt înălțimi, deci punctul M este ortocentrul. Deducem că $AM\perp DF$ şi, cum $DF \parallel BE$, obținem $AM\perp BE$.	**2p**