BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

CLASA a VIII-a

1. a) Demonstrați că dacă, a, b, c sunt numere reale nenegative, atunci $\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc}\le a+b+c$.

b) Fie $A_0=\{6-2\sqrt{5};\ 6+2\sqrt{5};\ 4\}$. Considerăm mulțimile $A_1, A_2, A_3, A_4,...$, care au cardinalul trei și elementele mulțimii A_{k+1} sunt mediile geometrice a câte două din elementele mulțimii A_k .

i) Scrieți elementele mulțimii A_1 .

ii) Este posibil ca una dintre mulțimi să fie: $\{4-\sqrt{5};\ \sqrt{5}+4;9\}$?.

Bedrulea Gabriela, Suceava

Barem:

a) Aplicăm inegalitatea mediilor $\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}$	2 p
b) $A_1=\left\{\sqrt{(6-2\sqrt{5})(6+2\sqrt{5})};\ \sqrt{4(6-2\sqrt{5})};\ \sqrt{4(6+2\sqrt{5})}\right\}=$ $=\{4;\ 2(\sqrt{5}-1);\ 2(\sqrt{5}+1)\}$	2p
Dacă notăm S_k suma elementelor mulțimii A_k , se observă din a) că $S_0\ge S_1\ge S_2\ge....$	2 p
Dar $S_0=16$ și $(4-\sqrt{5})+(\sqrt{5}+4)+9=17\ \Rightarrow\{4-\sqrt{5};\ \sqrt{5}+4;9\}$ nu poate fi o mulțime din șirul dat.	1 p

2. a) Descompuneți, în produs de cinci factori, expresia x^7-x .

b) Fie $a_n=n^7-n$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$. Determinați cel mai mare divizor comun al numerelor $a_1, a_2,..., a_{2013}$.

Bedrulea Gabriela, Suceava

Barem:

a) $x^7-x=x(x^6-1)=x(x^3-1)(x^3+1)=$ $=(x-1)x(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$	1p 1p
b) $a_1=0,\ a_2=1\cdot2\cdot3^2\cdot7,\ a_3=2\cdot3\cdot4\cdot7\cdot13$, deci $(a_2,a_3)=42\Rightarrow$ $\Rightarrow(a_1,a_2,a_3,....,a_{2013})\le42$	1p 1 p
Folosind a) arătăm că $a_n\,\vdots\,42,$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$. $(n-1)n(n+1)\,\vdots\,6$	1 p
Luând $n=7k+r$, $k\in\mathbb{N}$ și $r\in\{0,1,...,6\}$ se arată că $a_n\,\vdots\,7$ pentru orice	1 p
Finalizare	1 p

3 Se dă triunghiul echilateral ABC de latură a şi P un punct în interiorul triunghiului. În punctul P se ridică o perpendiculară pe planul triunghiului pe care se ia punctul M cu $MP=\frac{a}{2}$. Dacă d_1, d_2, d_3 sunt distanţele de la M la laturile triunghiului, să se arate că $d_1^2+d_2^2+d_3^2=a^2$ dacă şi numai dacă P este centrul cercului înscris triunghiului ABC.

Gheorghe Marchitan, Suceava

Barem:

Dacă distanţele de la punctul P la laturile triunghiului sunt x, y, z, atunci $x+y+z=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.	2p
Se vede că $d_1^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+x^2$, $d_2^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+y^2$, $d_3^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+z^2$	2p
Obținem $d_1^2+d_2^2+d_3^2=3\cdot\frac{a^2}{4}+(x^2+y^2+z^2)\ge3\cdot\frac{a^2}{4}+\frac{1}{3}\cdot(x+y+z)^2=\frac{3a^2}{4}+\frac{a^2}{4}=a^2$	1p
egalitatea având loc dacă şi numai dacă $3(x^2+y^2+z^2)=(x+y+z)^2\Leftrightarrow2(x^2+y^2+z^2)=2xy+2yz+2zx\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0\Leftrightarrow x=y=z\Leftrightarrow$ P este centrul cercului înscris triunghiului ABC.	2p

Orice altă rezolvare corectă va fi punctată corespunzător.