

**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ȘI  
INFORMATICĂ  
GRIGORE C. MOISIL  
Ediția a XXVIII - a, Bistrița, 15 -17 martie 2013**

**CLASA a VIII -a**

1. Fie  $ABCD A'B'C'D'$  o prismă patrulateră dreaptă cu bazele pătratele  $ABCD$  și  $A'B'C'D'$  în care  $AA' = \sqrt{2}$  și  $AB = 1$ . Notăm cu  $M, N, O$  mijloacele segmentelor  $[BB']$ ,  $[DD']$  și  $[BD]$ .

a) Arătați că  $A'B \perp (AMD)$ ;

b) Dacă  $\{G\} = A'O \cap (AMN)$ , arătați că  $G$  este centrul de greutate atât pentru triunghiul  $AMN$  cât și pentru triunghiul  $A'BD$ .

2. Să se determine funcțiile  $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$  cu proprietatea

$$[x, y] = [f(x), f(y)], \forall x, y \in \mathbb{N}^* \text{ cu } x \neq y$$

( unde  $[x, y]$  este cel mai mic multiplu comun al numerelor  $x$  și  $y$ ).

3. Fie  $a, b \geq 0$  numere reale cu proprietatea că  $|a - b| \geq \sqrt{ab}$ . Demonstrați că:

$$\frac{a^2+b^2}{2} \cdot \frac{a^3+b^3}{3} \leq \frac{a^5+b^5}{5}$$

4. Fie  $ABCD$  un paralelogram de arie 1 în care  $AD \leq AB \leq BD < AC$ . Să se arate că paralelogramul poate fi acoperit cu un dreptunghi de arie  $\sqrt{3}$ .

**Notă:** Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru: 3 ore.