Barem clasa a IX-a

1. Pentru $a = b = c = -1$ avem $k \geq \frac{5}{3}$ ………………………………1p.

Pentru $a = b = c = \frac{1}{3}$ avem $k \leq \frac{5}{3}$ …………………………………1p.

Găsim $k = \frac{5}{3}$ care convine…………………………………………1p.

$9x^3 + 3x^2 + 1 \geq 5x \Leftrightarrow (x+1)(3x-1)^2 \geq 0\ (\forall)x \geq -1$ ……….2p.

$9(a^3 + b^3 + c^3) + 3(a^2 + b^2 + c^2) + 3 \geq 5(a + b + c)\ (\forall)a, b, c \geq -1$ …….1p.

Finalizare $k = \frac{5}{3}$.…………………………………………………..1p.

2. Simetricul ortocentrului H al triunghiului ABC fata de mijlocul laturi BC este punctul D de pe cerc astfel incat A,E,D coliniare (manual clasa a IX-a). Vom exprima vectorii $\overrightarrow{AD}$ si $\overrightarrow{AE}$ in functie de vectorii $\overrightarrow{HB}$ si $\overrightarrow{HC}$. …………………………..1p

Daca $BH \cap AC = \{N\}$, $CH \cap AB = \{M\}$ atunci $\frac{AM}{MB} = tgB, \frac{AN}{NC} = tgC$. Din teorema lui Menelaus in triunghiul AMC si secante BHN: $\overrightarrow{CH} = \frac{1 + tgB}{tgC}\overrightarrow{HM}$. …………………………1p

Cum $\frac{AM}{MB} = tgB$ rezulta $\overrightarrow{HM} = \frac{\overrightarrow{HA} + tgB\overrightarrow{HB}}{1 + tgB}$ ……………………………………………………1p

deci $\overrightarrow{AH} = tgB\overrightarrow{HB} + tgC\overrightarrow{HC}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HD}$, $\overrightarrow{HD} = \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}$ (HBDC este paralelogram), $\overrightarrow{AD} = (tgB + 1)\overrightarrow{HB} + (tgC + 1)\overrightarrow{HC}$. ………………………………………………1p

Fie $\frac{BE}{EC} = k, k \in \Re$ atunci $\overrightarrow{HE} = \frac{\overrightarrow{HB} + k\overrightarrow{HC}}{1 + k}$, ……………………………………………………..1p

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HE}$, $\overrightarrow{AE} = \left(tgB + \frac{1}{1 + k}\right)\overrightarrow{HB} + \left(tgC + \frac{k}{1 + k}\right)\overrightarrow{HC}$. …………………………………1p

Vectorii $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}$ fiind coliniari $\Leftrightarrow$

$$\frac{tgB + \frac{1}{1+k}}{tgB+1} = \frac{tgC + \frac{k}{1+k}}{tgC+1} \Leftrightarrow \frac{k}{tgB+1} = \frac{1}{tgC+1} \Leftrightarrow k = \frac{tgB+1}{tgC+1} \text{ sau } \frac{BE}{EC} = \frac{tgB+1}{tgC+1}$$ 1p

3. Arătăm prin inductie matematică că $P(n)$: $(2+\sqrt{3})^n = a + b\sqrt{3}$ şi $3b^2 = a^2 - 1$.

1) Pentru $n = 1$ avem $P(1)$ adevărat.
2) Presupunem $P(n)$ adevărat şi demonstrăm că $P(n+1)$ adevărat.

Calculăm $(2+\sqrt{3})^{n+1} = (a + b\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = (2a+3b) + (a+2b)\sqrt{3} = A + B\sqrt{3}$.

Arătăm că $3B^2 = A^2 - 1$. ……………………………………………………………4p

Deci: $(2+\sqrt{3})^n = a + b\sqrt{3} = a + \sqrt{a^2-1}$. …………………………………………1p

De asemenea avem că $2a - 1 < a + \sqrt{a^2-1} < 2a$. Deci $x = [(2+\sqrt{3})^n] = 2a - 1$ 1p

Aşadar expresia din enunţ devine: $\frac{x^2+2x-3}{12} = \frac{(x-1)(x+3)}{12} = \frac{(a-1)(a+1)}{3} = \frac{a^2-1}{3} = b^2$, pătrat perfect. ………………………………………………………………………………………..1p

4. Fie $\Delta_1 = b^2 - 4c = t^2 \in \mathbb{N}$ şi $\Delta_2 = b^2 - 4c + 4p^2 = s^2 \in \mathbb{N}$. ……………………..2p

Atunci $s^2 - t^2 = 4p^2 \Leftrightarrow (s-t)(s+t) = 4p^2$. Cum $s - t$ şi $s + t$ au aceeaşi paritate avem două cazuri:

I. $\begin{cases} s - t = 2 \\ s + t = 2p^2 \end{cases}$ sau …………………………………………………………..1p

II. $\begin{cases} s - t = 2p \\ s + t = 2p. \end{cases}$ ……………………………………………………………………1p

Notăm cu x_1, x_2 rădăcinile primei ecuaţii şi cu x_3, x_4 rădăcinile celei de a doua ecuaţii.

I. $\begin{cases} t = p^2 - 1 \\ s = p^2 + 1 \end{cases}$ iar rădăcinile sunt $x_1, x_2 = \frac{-b\pm(p^2-1)}{2}$ şi $x_3, x_4 = \frac{-b\pm(p^2+1)}{2}$ ……………1p

de unde result $x_3 - x_1 = 1$.

II. $\begin{cases} t = 0 \\ s = 2p \end{cases}$ deci $x_1 = x_2$. ………………………………………………………………..1p

În ambele cazuri modulul diferenţei este mai mic sau egal cu unu. ……………1p