

CLASA A IX-A – SOLUȚII ȘI BAREME

1. Fie $a, b, c \in [0, +\infty)$. Arătați că $|a - b| + |b - c| + |c - a| = 2 \max\{a, b, c\}$ dacă și numai dacă $abc = 0$.

Laurențiu Panaitopol

Soluție. Dacă, de exemplu, $a = 0$, atunci $\max\{a, b, c\} = \max\{b, c\}$ și

$$|a - b| + |b - c| + |c - a| = b + c + |b - c| = \max\{b, c\}. \quad \mathbf{4p}$$

Reciproc, dacă presupunem, de exemplu, $a \leq b \leq c$ (putem, datorită simetriei), atunci $|a - b| + |b - c| + |c - a| = 2c - 2a$ și $\max\{a, b, c\} = c$, deci $a = 0$. **3p**

2. Pe laturile unui triunghi ABC luăm punctele distincte $A_1, A_2 \in (BC)$, $B_1, B_2 \in (AC)$, $C_1, C_2 \in (AB)$ astfel încât $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2} = \vec{0}$.

a) Arătați că, dacă x, y, z sunt numere reale astfel încât $\overrightarrow{A_1A_2} = x\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{B_1B_2} = y\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{C_1C_2} = z\overrightarrow{AB}$, atunci $x = y = z$.

b) Fie $\{M\} = A_2B_1 \cap B_2C_1$, $\{N\} = B_2C_1 \cap C_2A_1$, $\{P\} = C_2A_1 \cap A_2B_1$. Arătați că

$$\frac{A_2B_1}{MP} = \frac{B_2C_1}{MN} = \frac{C_2A_1}{NP}.$$

Soluție. a) Din ipoteză reiese $\overrightarrow{BC} = \frac{y}{x}\overrightarrow{AC} + \frac{z}{x}\overrightarrow{BA}$. Pe de altă parte, reprezentarea $\overrightarrow{BC} = 1 \cdot \overrightarrow{BA} + 1 \cdot \overrightarrow{AC}$ este unică, deci $y = z = x$. **4p**

b) Observăm că $\overrightarrow{B_1A_2} + \overrightarrow{C_1B_2} + \overrightarrow{A_1C_2} = \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2} = \vec{0}$, deci putem aplica a) în triunghiul MNP . **3p**

3. Este totdeauna posibil să partiționăm o mulțime de 2013 numere naturale, aflate în progresie aritmetică, în trei mulțimi astfel încât suma elementelor din fiecare mulțime să fie aceeași? Dar o mulțime de 2012 numere?

Soluție. a) Da: $2013 = 9 + 6 \cdot 334$ și grupăm primele nouă elemente $\{a_2, a_4, a_9\}$, $\{a_1, a_6, a_8\}$, $\{a_3, a_5, a_7\}$, iar următoarele secvențe de câte 6 termeni le grupăm $\{a_k, a_{k+5}\}$, $\{a_{k+1}, a_{k+4}\}$, $\{a_{k+2}, a_{k+3}\}$. **3p**

b) Nu. Dacă luăm primul termen foarte mare (de exemplu 10^7) și rația 1, atunci una dintre mulțimi va avea suma cel mult $670 \cdot (10^7 + 2012) < 671 \cdot 10^7$, iar alta va avea suma cel puțin $671 \cdot 10^7$. **4p**

4. Funcția $f : \mathbb{Z} \rightarrow \{0, 1\}$ are proprietățile:

(i) $f(1) = 1$

(ii) pentru orice $a, b \in \mathbb{Z}$, dacă $f(a) = 1$ și $f(b) = 1$, atunci $f(a + b) \neq f(a - b)$.

Determinați $f(0)$, $f(2)$ și $f(2013)$.

Soluție. Dacă $f(0) = 1$, atunci $f(1 + 0) \neq f(1 - 0)$ – contradicție – deci $f(0) = 0$. **1p**

Din $f(1 + 1) \neq f(1 - 1)$ reiese $f(2) = 1$. **1p**

Arătăm inductiv că $f(3n) = 0$, $f(3n + 1) = 1$, $f(3n + 2) = 1$. **2p**

Cazul $n = 0$ a fost analizat, iar dacă presupunem proprietatea adevărată pentru un anumit n , atunci

- $f(3n + 2 - 1) \neq f(3n + 2 + 1)$ implică $f(3n + 3) = 0$,
- $f(3n + 2 - 2) \neq f(3n + 2 + 2)$ implică $f(3n + 4) = 1$,
- $f(3n + 4 - 1) \neq f(3n + 4 + 1)$ implică $f(3n + 5) = 1$.

Deducem $f(2013) = 0$. **3p**