OLIMPIADA DE MATEMATICĂ - IALOMIȚA
FAZA LOCALĂ, 09 februarie 2013
CLASA a VIII a
Soluții şi barem de corectare

Subiectul I.

1. Să se arate că $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\geq\frac{(a+b)^2}{x+y}$, oricare ar fi $a,b,x,y\in(0,\infty)$.

2. Dacă $a,b\in(0,\infty)$ şi $a+b=2$, să se arate că $\frac{a^4}{3a+b}+\frac{b^4}{3b+a}\geq\frac{2}{3}$.

3. Dacă $a,b,c\in(0,\infty)$ şi $a+b+c=3$, să se arate că $\frac{a^4}{2a+b+c}+\frac{b^4}{2b+c+a}+\frac{c^4}{2c+a+b}\geq\frac{3}{4}$.

Nicolae Papacu, Slobozia

Soluție.

1. Efectuarea calculelor duce la: $(ay-bx)^2\geq 0$ … **(2p)**

2. Folosind **1**. avem: $a^2+b^2\geq\frac{(a+b)^2}{1+1}=2$, $\frac{a^4}{2a+b}+\frac{b^4}{2b+a}\geq\frac{(a^2+b^2)^2}{3(a+b)}\geq\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ … **(2p)**

3. Folosind **1.** avem: $a^2+b^2+c^2\geq\frac{(a+b+c)^2}{1+1+1}=3$ ……. **(1p)**

$\frac{a^4}{2a+b+c}+\frac{b^4}{2b+c+a}+\frac{c^4}{2c+a+b}\geq\frac{(a^2+b^2)^2}{3a+3b+2c}+\frac{c^4}{2c+a+b}$ … **(1p)**

$\frac{(a^2+b^2)^2}{3a+3b+2c}+\frac{c^4}{2c+a+b}\geq\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{4(a+b+c)}\geq\frac{3^2}{12}=\frac{3}{4}$…… **(1p)**

Subiectul II.

Fie x,y,z numere reale astfel încât $\frac{xyz}{x+y}=-1$, $\frac{xyz}{y+z}=1$ şi $\frac{xyz}{z+x}=a$, unde $a>\frac{1}{2}$ este un număr real. Determinați produsul xyz.

Marin Chirciu, G.M. nr. 11/2012

Soluție.

Din $\frac{xyz}{x+y}=-1$, rezultă $\frac{x+y}{xyz}=-1$, adică $\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}=-1$ (1)……. **(1p)**

Analog se obțin: $\frac{1}{xz}+\frac{1}{xy}=1$ (2) şi $\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}=\frac{1}{a}$ (3) ………….. **(2p)**

Adunând (1), (2) şi (3) rezultă $\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}=\frac{1}{2a}$ (4) …………. **(1p)**

Din (1) şi (4), rezultă $\frac{1}{xy}=\frac{2a+1}{2a}$ (5) ………………….. **(1p)**

Din (2) şi (4) rezultă $\frac{1}{yz}=-\frac{2a-1}{2a}$ (6), iar din (3) şi (4) avem $\frac{1}{zx}=-\frac{1}{2a}$ (7) ……. **(1p)**

Înmulțind relațiile (5), (6) şi (7) se obține $\left(\frac{1}{xyz}\right)^2=\frac{4a^2-1}{8a^3}$ şi deci $xyz=\pm\frac{2a\sqrt{2a}}{\sqrt{4a^2-1}}$ …. **(1p)**

Subiectul III.
Pentru n un număr natural se consideră numerele naturale $a=4n+5$ şi $b=5n+11$.
1. Să se arate că $a^2+b^2 \neq 2013$, oricare ar fi n număr natural.
2.Să se determine numerele naturale n pentru care a şi b sunt pătrate perfecte consecutive.

Nicolae Papacu, Slobozia

Soluție.
1. Folosind teorema împărțirii cu rest, un număr natural c este de forma $c=M_3+r$, $r\in\{0,1,2\}$ (M_3 înseamnă multiplu de 3)…… **(1p)**
Atunci $c^2=M_3+p$ cu $p\in\{0,1\}$. Dacă $a^2+b^2=2013$, atunci $(a^2+b^2=M_3+p+q)\vdots 3$, unde $p,q\in\{0,1\}$……. **(1p)**
Imediat $p=q=0$ şi deci $a,b=M_3$, adică $a^2+b^2=M_9\neq 2013$……… **(1p)**
2. Deoarece $a<b$, fie $a=4n+5=p^2$, $b=5n+11=(p+1)^2$, unde $p\in N$ …. **(1p)**
$5a-4b=-19=5p^2-4(p+1)^2$, de unde $p^2-8p+15=0$, adică $p(p-8)=-15$… **(2p)**
Rezultă că $p|15$ şi $(p-8)|15$. Se obține $p\in\{3,5\}$ şi atunci $n\in\{1,5\}$…. **(1p)**

Subiectul IV.
Fie paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ şi H ortocentrul triunghiului ACD'.
1. Dacă $ABCD$ este pătrat, să se arate că dreptele DB' şi AC sunt perpendiculare
2. Să se demonstreze că dreapta DH este perpendiculară pe planul (ACD').
3. Să se arate că centrul de greutate al triunghiului ACD' se găseşte pe dreapta DB'.

Soluție. Fie $AC\cap BD=\{O\}$, punctul O fiind mijloacele diagonalelor lui $ABCD$
1. Dacă $ABCD$ este pătrat, atunci $BD\perp AC$; deoarece $D'D\perp(ABCD)\Rightarrow D'D\perp AC$ şi atunci $AC\perp(BD,DD')=(BDD'B')$. Cum $DB'\subset(BDD'B')$, rezultă $AC\perp DB'$… **(2p)**
2. Tetraedrul $DACD'$ este tridreptunghic ($DA\perp DC\perp DD'\perp DA$)
$DC\perp DA$, $DC\perp DD'\Rightarrow DC\perp(DA,DD')=(DAD')$, $D'A\subset(DAD')$, rezultă $DC\perp D'A$.
$CH\perp D'A$ şi $DC\perp D'A$ implică $D'A\perp(DCH)$, $DH\subset(DCH)$ şi deci $D'A\perp DH$
Analog $D'C\perp DH$ şi atunci $DH\perp(D'A,D'C)=(D'AC)$……. **(3p)**
3. Fie G centrul de greutate al triunghiului ACD'; avem $G\in(D'O)$ şi $D'G=2GO$. În dreptunghiul $DBB'D'$, fie $DG\cap D'B'=\{P\}$. Din asemănarea triunghiurilor DGO şi $D'GP$ rezultă $D'P=2DO=DB$, deci $D'P=D'B'$ şi prin urmare $P=B'$, adică $G\in DB'$. (Mai, mult $B'G=2GD$)…….**(2p)**