COLEGIUL NAȚIONAL DE INFORMATICĂ
Piatra Neamț, Neamț, România, Str. Mihai Viteazu, nr. 12; 610226
Tel/Fax: 00 40 233 227 510; 227 529; 223 252.
http://cni.nt.edu.ro e-mail: cni_pn@yahoo.com

Concursul „PROSOFT@NT"
concurs înscris în calendarul M.E.N.
al concursurilor regionale școlare
organizate în anul școlar 2012-2013,
fără finanțare M.E.N., concurs
cu participare internațională
21 februarie 2013

Concurs de matematică – proba individuală

BAREM DE CORECTARE

clasa a VIII-a

1. $a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2=4\sqrt{a^3b^3c^3} \Leftrightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{4}{\sqrt{abc}}$ (1p)……………… ………(1p)

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 2\cdot\sqrt{\frac{1}{abc}} \\ \frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\geq 2\cdot\sqrt{\frac{1}{abc}} \\ \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{c}+\frac{1}{b}\geq 2\cdot\sqrt{\frac{1}{abc}} \end{array}\right\}$$ ……………………………………...……………………..…..(1p.)

Prin adunare se obține:

$\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{6\sqrt{abc}}{abc}$ (2)……………………….……………………….(1p.)

Dar $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}$ (3) ……………………..…………...…………..(2p.)

Din (2) și (3) avem $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{6\sqrt{abc}}{abc}$ (4)…………….…………….(1p.)

Din (1) și (4) obținem:

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{2\sqrt{abc}}{abc}\Leftrightarrow ab+ac+bc\geq 2\sqrt{abc}$ ……………….………………………(1p.)

2. $2n-1+2\sqrt{(n-1)n}=\left(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\right)^2$ ………………………………………….……………..(2p)

$\frac{x\cdot y}{x+y}<\frac{x+y}{2},(x,y\in R_+)$ ………………………………………..………..……..(2p)

Se adună relațiile :

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1}}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}<\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1}}{2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\sqrt{(n-1)n}}{\sqrt{2n-1+2\sqrt{(n-1)n}}}=\frac{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}<\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}{2} \end{array}\right\}$$ ………………………….…..….(2p.)

Se obține

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}+\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}+\ldots+\frac{\sqrt{(n-1)n}}{\sqrt{2n-1+2\sqrt{(n-1)n}}}<\frac{\sqrt{1}+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\ldots+2\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}{2}<$$

$<\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}$ …………………………………………………..…..…….(1p.)

3. (U-centrul feţei $(A'B'C'D')$), $\Delta A'MU \sim \Delta CMA \Rightarrow \frac{A'U}{AC} = \frac{1}{2}$ şi $\frac{AM}{MU} = 2$ ……………(1p)

$M \in (AD'B')$……………………………………………………………………(1p)

M – centrul de greutate al $\Delta AD'B'$ ……………………………………………..…..(1p)

$MN \perp AB'$ şi D', M, N coliniare $\Rightarrow ND'$ – mediană şi înălţime în $\Delta AD'B'$ ……….…….(1p)

$MP \perp AD'$ şi B', M, P coliniare $\Rightarrow B'P$ mediană şi înălţime în $\Delta AD'B'$ …………..……(1p.)

Deci $\Delta AD'B'$ este echilateral,

$\Delta AA'B' \equiv \Delta AA'D'$ (C.I.) $\Rightarrow (A'B') \equiv (A'D')$

Analog $\Delta AA'B' \equiv \Delta BA'D' \Rightarrow (AA') \equiv (A'D')$

Deci paralelipipedul este cub ……………………………………………….…….(1p.)

4. $AM + MC'$ este minim dacă $\sphericalangle(AMB) \equiv \sphericalangle(CMC')$ ……………...……………………...(1p)

$\Delta MBA \sim \Delta MCC' \Rightarrow MB = \frac{ab}{a+c}$ şi analog $NB = \frac{ac}{a+b} = RD'$ şi $RD = NB' = \frac{bc}{b+c}$,

$PB' = SD = \frac{ab}{b+c}$ şi $PA' = SC = \frac{ac}{b+c}$ ……………………….…………………………(2p)

Fie $PN \cap AB = \{T\}$ şi $SM \cap AB = \{T'\}$

Din $\Delta CMS \sim \Delta BMT'$ şi $\Delta B'NP \sim \Delta BNT$ obţinem $BT = \frac{a^2}{b+c} = BT'$, deci

$T = T' \Rightarrow PN, MS$ coplanare………………………………...………………………..(2p)

Analog $Q, R \in (MNP)$ ……………………………………..…………………………(2p)