Concurs de matematică – proba individuală

BAREM DE CORECTARE

clasa a X-a

Subiectul 1:

a) Pentru $x \geq 4 \Rightarrow 2^{\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}} \geq 4$………...............................1 punct.

Funcţia $f:[4,\infty) \to R, f(x) = -x^2 + 8x - 12$ este strict descrescătoare,
deci $f(x) \leq 4$……………………………………………..1 punct.
Finalizare: $x = 4$ soluţie unică…………………………..1 punct.

b) $x = 1$ nu este soluţie.

$x = 2$: nu este soluţie.

$x = 3: 3^{\cos\frac{\pi}{3}} = tg\frac{\pi}{3}$ (A), deci $x = 3$ este soluţie.

$x > 3$: $\frac{\pi}{x} < \frac{\pi}{3} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{x} > \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow x^{\cos\frac{\pi}{x}} > 3^{\cos\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3} = tg\frac{\pi}{3} > tg\frac{\pi}{x}$., deci ecuaţia nu are soluţii $x > 3$ şi rămâne soluţie unică $x = 3$.

Subiectul 2:

$z_1 = r(\cos a + i\sin a)$ si $z_2 = r(\cos b + i\sin b)$...1 punct.
Relaţia din enunţ devine:

$Z = r^2(1 + 8\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{a+b}{2})$, deci este real. ....3 puncte.

$1 + 8\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{a+b}{2} = (2\cos\frac{a+b}{2} + \cos\frac{a-b}{2})^2 + \sin^2\frac{a-b}{2} \geq 0$...3 puncte.

Subiectul 3:

a) $\frac{g(x)+g(y)}{2}=f(\frac{x+y}{3})-f(0)$...1 punct

$f(\frac{x+y}{3})=\frac{f(x+y)+f(0)}{2}$..2 puncte

$\frac{g(x)+g(y)}{2}=\frac{f(x+y)-f(0)}{2}=\frac{g(x+y)}{2} \Rightarrow g(x+y)=g(x)+g(y), \forall x,y\in R$...1 punct.

$f(\frac{x+y}{3})=\frac{f(x+y)+f(0)}{2}$.

b) $g(\frac{x+y}{3})=f(\frac{x+y}{3})-f(0)=\frac{g(x)+g(y)}{2}$.............................1 punct

$x=y \Rightarrow g(2x)=2g(x) \Rightarrow g(2x)=g(x)$ ....1 punct

$g(x)=0 \Rightarrow f(x)=f(0)=ct., \forall x\in R$...1 punct.

Subiectul 4:

Notăm $x_n=[n\sqrt{2}],\ y_n=[n\sqrt{3}],\ n\in N$.

$x_{n+1}-x_n, y_{n+1}-y_n \in \{1,2\}$ ....1punct.

Presupunem prin absurd $\exists k\in N$ a.î. $a_n, n\geq k$, au aceeaşi paritate......1punct.

Atunci $a_{n+1}-a_n\in\{2,4\}, \forall n\geq k$ ....1 punct

$a_{n+1}-a_n=2 \Rightarrow x_{n+1}-x_n=y_{n+1}-y_n=1$..1 punct.

$a_{n+1}-a_n=4 \Rightarrow x_{n+1}-x_n=y_{n+1}-y_n=2$ ....1 punct.

Rezultă că $y_{n+1}-x_{n+1}=y_n-x_n=...=y_k-x_k$......................................1 punct.

Dar $y_n-x_n > n\sqrt{3}-1-n\sqrt{2}$, $\forall n\in N$, de unde se obţine

$n<\frac{y_k-x_k+1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}, \forall n\geq k$, absurd!..1 punct.