COLEGIUL NAȚIONAL DE INFORMATICĂ
Piatra Neamț, Neamț, România, Str. Mihai Viteazu, nr. 12; 610226
Tel/Fax: 00 40 233 227 510; 227 529; 223 252.
http://cni.nt.edu.ro e-mail: cni_pn@yahoo.com

Concurs de matematică – proba individuală

BAREM DE CORECTARE

clasa a IX-a

Problema1

Fie A o mulţime de 51 de elemente inclusă în mulţimea $A=\{1,\ 2,\ 3,...,100\}$.

Să se demonstreze că există cel puţin o ecuaţie de gradul doi cu coeficienţi în mulţimea A *ale cărei rădăcini sunt raţionale.*

Soluţie:

Ordonăm elementele lui A. Presupunem $a_1 < a_2 < .... < a_{51}$. Considerăm diferenţele $a_{51}-a_1$, $a_{51}-a_2,\ldots,\ a_{51}-a_{50}$, obţinând astfel 50 de numere nenule diferite, mai mici decât 100. Împreună cu elementele lui A vom avea 101 numere naturale nenule mai mici decât 100, iar în baza principiului lui Dirichlet rezultă că există $i,\ j \in \{1,\ 2,\ 3,...,50\}$, astfel ca $a_{51}-a_i=a_j$.

4p

Alegând $a_{51}=b$, $a_i=a$, $a_j=c$ vom avea $b=a+c$.

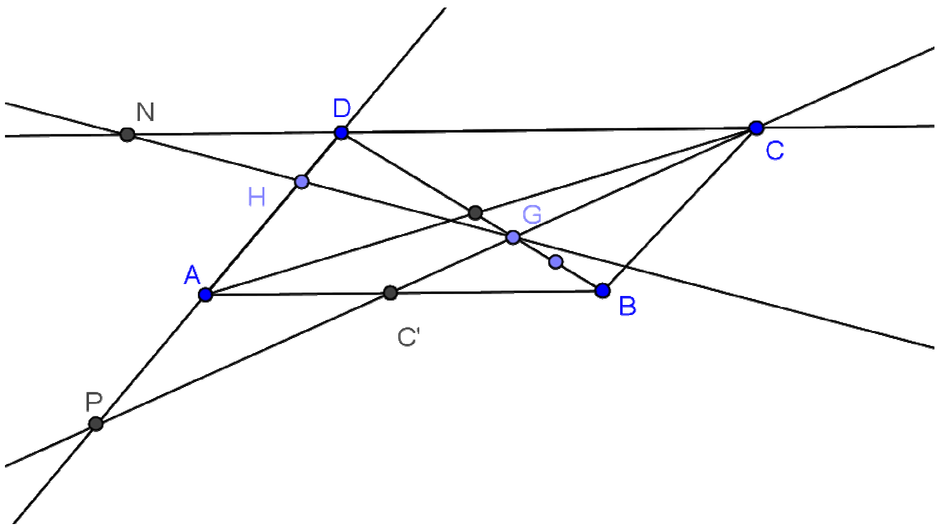
Construim ecuaţia $ax^2+bx+c=0$ cu rădăcinile $x_1=-1,\ x_2=-\dfrac{c}{a}\in\mathbb{Q}$. 3p

Problema 2

Se consideră paralelogramul ABCD şi fie G centrul de greutate al triunghiului ABC. Fie punctul H pe segmentul AD şi fie punctul D pe segmentul NC.

Să se arate că punctele G, H, N sunt coliniare dacă şi numai dacă $\frac{CN}{ND}-\frac{AH}{HD}=\frac{1}{2}$.

Soluţie:



În triunghiul PCD aplicăm teorema lui Menelaus cu transversala NG.

H,N,G sunt coliniare $\Leftrightarrow \frac{GC}{GP}\cdot\frac{PH}{HD}\cdot\frac{DN}{NC}=1$ .2p

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{2}{3}CC'}{\left(1+\frac{1}{3}\right)CC'}\cdot\frac{AH+HD+AH}{HD}\cdot\frac{ND}{CN}=1$$ 3p

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot\left(2\cdot\frac{AH}{HD}+1\right)\cdot\frac{ND}{CN}=1 \Leftrightarrow \frac{AH}{HD}+\frac{1}{2}=\frac{CN}{ND}$$

$$\Leftrightarrow \frac{CN}{ND}-\frac{AH}{HD}=\frac{1}{2}$$ 2p

Problema 3

Se consideră șirul $(a_n)_{n\ge 0}$ *de numere naturale nenule cu proprietatea că*

$$1+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{a_k a_{n-k}}{a_{k+1}}=a_n,\ \textit{pentru orice număr natural nenul } n.$$

Să se arate că șirul $(a_n)_{n\ge 0}$ *este o progresie geometrică.*

Soluție:

Din $1+\frac{a_0a_1}{a_1}=a_1$ obținem $a_1=1+a_0$. Pentru $n=2$, din $1+\frac{a_0a_2}{a_1}+\frac{a_1a_1}{a_2}=a_2$ obținem că

$a_2^2\left(1-\frac{a_0}{a_1}\right)-a_2-a_1^2=0 \Leftrightarrow a_2^2-a_1a_2-a_1^3=0$. 1p

Cum $a_2\in\mathbb{N}$, avem $\Delta=a_1^2(1+4a_1)$ pătrat perfect, deci $1+4a_1$ este pătrat perfect impar.

Din $1+4a_1=(1+2m)^2$ obținem $a_1=m(m+1)$, $m\in\mathbb{N}^*$ 1p

și apoi $a_2=\frac{1}{2}\big(m(m+1)+a_1(1+2m)\big)=m(m+1)^2$. 1p

Vom arăta că $a_n=m(m+1)^n$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. 1p

Presupunem că $a_k=m(m+1)^k$, $k=\overline{1,n-1}$. Atunci:

$$a_n=1+\frac{a_0a_n}{a_1}+\frac{a_1a_{n-1}}{a_2}+\frac{a_2a_{n-2}}{a_3}+\ldots+\frac{a_{n-1}a_1}{a_n}\Leftrightarrow$$

$$a_n\frac{a_1-a_0}{a_1}=1+\frac{a_{n-1}}{m+1}+\frac{a_{n-2}}{m+1}+\frac{a_{n-3}}{m+1}+\ldots+\frac{a_2}{m+1}+\frac{a_1\cdot a_{n-1}}{a_n}\Leftrightarrow$$

$$\frac{a_n}{a_1}=1+\frac{1}{m+1}\cdot a_2\cdot\frac{(m+1)^{n-2}-1}{(m+1)-1}+\frac{m^2\cdot(m+1)^n}{a_n}\Leftrightarrow$$

$$\frac{a_n}{a_1}=(m+1)^{n-1}-m+\frac{m^2\cdot(m+1)^n}{a_n}\Leftrightarrow$$

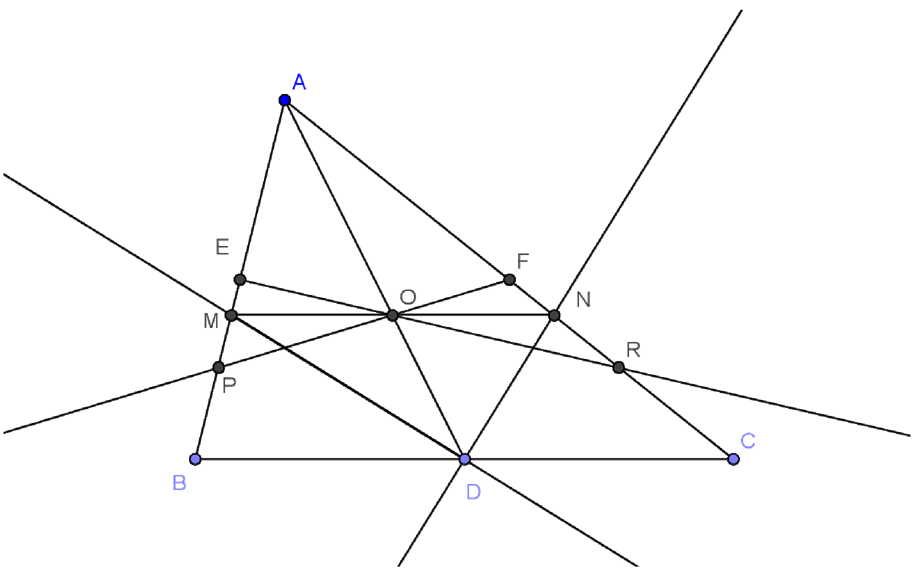
$a_n^2-\big(m(m+1)^n-m^2(m+1)\big)a_n-m^3(m+1)^{n+1}=0$, ecuație care are soluția pozitivă

$a_n=m(m+1)^n$, ceea ce trebuia demonstrat. 3p

Problema 4

Într-un triunghi oarecare ABC, fie mediana AD, $D\in(BC)$ *şi E, F mijloacele laturilor* (AB), (AC). *Notăm cu* $M\in(AB)$, $N\in(AC)$ *picioarele bisectoarelor unghiurilor* $\measuredangle(BDA)$, *respective* $\measuredangle(ADC)$. *Fie* $AD\cap MN=\{O\}$, $AB\cap FO=\{P\}$ *şi* $AC\cap EO=\{R\}$. *Să se arate că* $\left|\overrightarrow{PR}\right|=\left|\overrightarrow{AD}\right|$.

Soluţie:



Aplicăm teorema bisectoarei în $\triangle ADB$ şi $\triangle ADC$. Obţinem $\frac{MB}{MA}=\frac{BD}{DA}$ (1), respectiv $\frac{NC}{NA}=\frac{CD}{DA}$ (2). Cum BD=DC $\Rightarrow\frac{MB}{MA}=\frac{NC}{NA}$ $\Rightarrow MN\parallel BC$ 1p

Din $MN\parallel BC$ $\Rightarrow\frac{AB}{AM}=\frac{BC}{MN}$. Folosind relaţia (1) rezultă:

$$\frac{BD+AD}{AD}=\frac{BD}{DA}+1=\frac{MB}{AM}+1=\frac{MB+AM}{AM}=\frac{AB}{AM}=\frac{BC}{MN} \qquad (3)$$

EF linie mijlocie în $\triangle ABC$ $\Rightarrow 2\cdot EF=BC$, relaţia (3) devine

$$\frac{BD+AD}{AD}=\frac{2\cdot EF}{MN}\Leftrightarrow\frac{2}{MN}=\frac{BD+AD}{AD\cdot EF}\Leftrightarrow\frac{2}{MN}=\frac{1}{AD}+\frac{1}{EF} \qquad (4)$$ 1p

Deoarece $MN\parallel BC$ şi $EF\parallel BC$ rezultă $MN\parallel EF$ şi $\frac{AE}{EM}=\frac{AF}{FN}$ (5).

Aplicăm teorema lui Menelaus în triunghiul AMN cu transversalele ER , respectiv PF şi obţinem $\frac{AR}{NR}=\frac{AE}{EF}\cdot\frac{MO}{ON}$, respectiv $\frac{AP}{MP}=\frac{AF}{FN}\cdot\frac{NO}{OM}$ 1p

Conform relaţiei (5) şi $MO=NO$ obţinem $\frac{AR}{NR}=\frac{AP}{MP}$ $\Rightarrow$ PR || MN 1p

În trapezul EPRF, MN este paralelă cu bazele şi trece prin punctual de intersecţie al diagonalelor. Rezultă că $\frac{1}{PR}+\frac{1}{EF}=\frac{2}{MN}$ 2p

Conform relaţiei (4) obţinem $\frac{1}{PR}=\frac{1}{AD}$, adică $\left|\overrightarrow{PR}\right|=\left|\overrightarrow{AD}\right|$. 1p