Concurs de matematică – proba individuală

BAREM DE CORECTARE

clasa a XI-a

1. Se dau matricile A,B∈ $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $A=\begin{pmatrix} a & c & b\\ c & b & a\\ b & a & c\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b & a & c\\ a & c & b\\ c & b & a\end{pmatrix}$.Să se calculeze $(A-B)^n$.

   Rezolvare:

   $A-B=\begin{pmatrix} a-b & c-a & b-c\\ c-a & b-c & a-b\\ b-c & a-b & c-a\end{pmatrix}$. Notând x = a – b, y =c – a, z = b – c , rezultă $A-B=\begin{pmatrix} x & y & z\\ y & z & x\\ z & x & y\end{pmatrix}$ şi x+z+y= 0……………………………………………………………………………………..2p

   $(A-B)^2=\begin{pmatrix} \sum x^2 & \sum xy & \sum xy\\ \sum xy & \sum x^2 & \sum xy\\ \sum xy & \sum xy & \sum x^2\end{pmatrix}=\sum xy\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$ deoarece $\sum x^2=(\sum x)^2$-$2\sum xy=-2\sum xy$.

   Notând C = $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$ rezultă că C^2= -3 C …………………………………………………2p

   Prin inducţie rezultă C^n= $(-3)^{n-1}C$ ………………………………………………………………………1p

   Deci $(A-B)^{2n}=(\sum xy)^n\cdot C^n=(-3)^{n-1}(\sum xy)^n\cdot C$.

   $(A-B)^{2n+1}=(-3)^{n-1}(\sum xy)^n\cdot C\cdot(A-B)$.

   Cum $C\cdot(A-B)=\ -3\ \cdot(A-B)$ rezultă $(A-B)^{2n+1}=(-3)^n(\sum xy)^n\cdot(A-B)$….2p

2. Se consideră matricea A,B∈ $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ cu A=- ${}^tA$, B= ${}^tB$. Fie funcţia definită prin f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, f(x)=det(A+xB). Arătaţi că ,dacă ecuaţia f(x)=0 are cel puţin două soluţii reale egale atunci det(A+B)=detB.

   Rezolvare:

   Din definiţia determinantului, f este o funcţie de grad cel mult trei

   f(x)= (det B) x^3+ a x^2+ bx +det A …………………………………………………………………2p

   Avem f(x)= det ${}^t(A+xB)=\det(-A+xB)=-\det(A-xB)=-f(-x),\forall x\in\ \mathbb{R}$, deci f este funcţie impară.

   Rezulta că a = det A = 0, deci f(x)= (det B) x^3+ bx …………………………………1p

   Deoarece are două soluţii egale rezultă b= 0 ……………………………………………1p

   Deci f(x)= (det B) x^3……………………………………………………………………………………1p

   Prin urmare f(1)= det B rezultă det (A+B)= det B ……………………………………………1p

3. Fie $(a_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ un şir de numere reale astfel încât a_1=a > 1 şi $a_{n+1} = a_n + \sqrt{a_n} - 1, \forall n\epsilon\mathbb{N}^*$.

   a) Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{a_n}}{n}$.

   b) Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}\frac{4a_n - n^2}{nln}$.

   Rezolvare:

   Observăm că $a_n > 1, \forall n\epsilon\mathbb{N}^*$, deci $a_{n+1} - a_n > 0$, adică şirul e strict crescător. Dacă ar fi majorat, ar fi convergent la o limită l. Deci l= l+$\sqrt{l} - 1$, de unde l= 1 , ceea ce e imposibil.
   Rezultă că $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$……………………………………………………………………………………………………….1p

   Relaţia de recurenţă devine $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{1}{\sqrt{a_n}} - \frac{1}{a_n}$, de unde $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$=1 ……………………..1p

   Cu lema lui Stolz-Cesaro: $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{a_n}}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1} - a_n}{\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{a_n} - 1}{\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1 - \frac{1}{\sqrt{a_n}}}{\sqrt{\frac{a_{n+1}}{a_n}} + 1} = \frac{1}{2}$.
   ……………………………………………………………………………………………1p

4. Fie f, g : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, funcţii periodice astfel încât $\lim_{n\to\infty}\left(f(x) - g(x)\right) = 0$.
   Să se arate căf şi g au perioadele egale şi f=g.
   Rezolvare:
   Fie t şi s perioadele funcţiilor f, respectiv g. Fie a∈ $\mathbb{R}$, fixat.
   Avem $0 \le |g(a+t) - g(a)| = |g(a+ks+t) - g(a+ks)| = |g(a+ks+t) - f(a+ks+t) + f(a+ks+t) + g(a - ks)|, \forall k\epsilon\mathbb{N}$……………………………………………………………………….2p
   Dacă trecem la limită după k→ ∞ deducem că $0 \le |g(a+t) - g(a)| \le 0$, ceea ce arată că $g(a+t) = g(a), \forall$a ∈ $\mathbb{R}$……………………………………………………………………………………………1p
   Analog obţinem f(x+s)=f(x), ∀x ∈ $\mathbb{R}$…………………………………………………………………………….1p
   Fie t o perioadă comună pentru funcţiile f şi g iar x ∈ $\mathbb{R}$ arbitar.
   Este evident că f(x) – g(x)=f(x+nt) – g (x+nt) $\forall n\epsilon\mathbb{N}^*$…………………………………………………………..1p
   Rezultă că, f(x) – g(x)= $\lim_{n\to\infty}$(f(x+nt) – g (x+nt))= 0……………………………………………………………….1p
   De unde, f(x)=g(x) , ∀x ∈ $\mathbb{R}$…………………………………………………………………………………………….1p