



Olimpiada de matematică
Etapa locală 16.02. 2013
Barem de notare clasa a VII-a

Soluție problema 1	
a) Inegalitatea se scrie $2013 + \sqrt{2013} < 2059 \Leftrightarrow \sqrt{2013} < 46 \Leftrightarrow 2013 < 46^2 \Leftrightarrow 2013 < 2116$, evident.	1p
b) $2013 < x^2 < 2059 \Leftrightarrow \sqrt{2013} < x < \sqrt{2059}$.	1p
Dar $44 < \sqrt{2013}$ și $\sqrt{2059} < 46$. Rezultă inegalitatea $44 < x < 46$. Cum $x \in \mathbb{N}$, rezultă $x = 45$ care verifică inegalitățile date.	1p
c) Notăm $\sqrt{2013 + \sqrt{2013 - n}} = p \Rightarrow 2013 + \sqrt{2013 - n} = p^2$	1p
Rezultă $2013 < p^2 < 2013 + \sqrt{2013} < 2059$. Conform punctului precedent $p = 45$	1p
Înlocuind rezultă $\sqrt{2013 + \sqrt{2013 - n}} = 45$, de unde se obține $\sqrt{2013 - n} = 12$	1p
Rezultă $n = 1869$.	1p
Total punctaj problema 1	7 p
Soluție problema 2	
a) Aducând la același numitor și eliminând numitorii, egalitatea se scrie astfel $(k+1) - k = 1$, iar aceasta este evidentă	1p
b) Împărțind prin $k+1 > 0$ inegalitatea se scrie $k < k+1$, iar aceasta este evidentă	1p
c) Din b) rezultă: $\frac{1}{(k+1)^2} < \frac{1}{k(k+1)}$.	1p
Ținând cont de a) rezultă: $\frac{1}{(k+1)^2} < \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.	1p
Deci $\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$ $\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ $\frac{1}{100^2} < \frac{1}{99} - \frac{1}{100}$ Adunând aceste inegalități rezultă $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \dots + \frac{1}{100^2} < 0,99$.	1p
Adunând 1 și scăzând 1 în membrul întâi, rezultă $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \dots + \frac{1}{100^2} - 1 < 0,99 \Rightarrow a - 1 < 0,99 \Rightarrow a - 0,99 < 1$	1p
Deoarece $a > 1$ rezultă $a - 0,99 > 0$. Atunci $a - 0,99 = a - 0,99 $. Cum $ a - 0,99 = 0,99 - a $, din ultima inegalitate rezultă concluzia.	1p
Total punctaj problema 2	7 p



Soluție problema 3	
a) Aria dreptunghiului $ABCD$ este de două ori aria triunghiului ABC .	1p
BM este înălțime în triunghiul ABC .	1p
Rezultă $A_{\triangle ABC} = \frac{BM \cdot AC}{2} = 6 \text{ cm}^2$, $A_{[ABCD]} = 12 \text{ cm}^2$.	1p
b) $\triangle ABC \cong \triangle CDA$, deci înălțimile lor sunt congruente, adică $BM = DN$.	1p
$BM \perp AC$ și $DN \perp AC \Rightarrow BM \parallel DN$. Prin urmare patrulaterul $BMDN$ este paralelogram (are două laturi opuse paralele și congruente).	1p
c) Presupunem, prin reducere la absurd, că paralelogramul $BMDN$ este un romb. Atunci $BD \perp AC$.	1p
Deoarece dreptunghiul $ABCD$ are diagonalele perpendiculare el este pătrat, adică $AB = BC$, ceea ce contrazice ipoteza.	1p
Total punctaj problema 3	7 p
Soluție problema 4	
$\triangle AMN \sim \triangle BCM$ (deoarece $\frac{MN}{BC} = \frac{1}{2} = \frac{AN}{BM}$, iar triunghiurile sunt dreptunghice) $\Rightarrow \frac{MN}{CM} = \frac{1}{2}$	1p
Rezultă relațiile:	
$\sphericalangle AMN \equiv \sphericalangle BCM$	1p
$\sphericalangle ANM \equiv \sphericalangle BMC$	1p
$m(\sphericalangle ANM) + m(\sphericalangle AMN) = 90^\circ$	1p
Rezultă că triunghiul MNC este dreptunghic în M	1p
$\triangle MNC \sim \triangle ANM$ (deoarece $\frac{MN}{CM} = \frac{1}{2} = \frac{AN}{MA}$, iar triunghiurile sunt dreptunghice)	1p
Rezultă $\sphericalangle MNC \equiv \sphericalangle ANM$, de unde concluzia.	1p
Total punctaj problema 4	7 p