MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN MARAMUREŞ

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală – 9 februarie 2013
CLASA a VIII– a
Barem de corectare

Subiectul 1.

a) Fie a şi b două numere naturale. Ştiind că mulţimea $(a,b)\cap N$ conţine un singur element arătaţi că $\sqrt{a\cdot b+1}$ este un număr raţional.

b) Fie a, b şi c trei numere naturale nenule. Ştiind că $(a,b)\cap N$ conţine 5 elemente şi că $(c,b)\cap N$ conţine 3 elemente. Arătaţi ca $\sqrt{a^b+a^c}$ este iraţional.

a) $(a,b)\cap N$ conţine un singur element $\Rightarrow$ b=a+2 ………………………………………... **2p**

Atunci $\sqrt{a\cdot b+1}=\sqrt{a\cdot(a+2)+1}=\sqrt{(a+1)^2}=|a+1|$ …………………………………… **2p**

b) $(a,b)\cap N$ conţine 5 elemente $\Rightarrow$ b=a+6, iar $(c,b)\cap N$ conţine 3 elemente $\Rightarrow$ b=c+4, c=a+2… **1p**

$\sqrt{a^b+a^c}=\sqrt{a^{a+2}+a^{a+6}}=\sqrt{a^{a+2}(1+a^4)}$

Pentru a=1 $\Rightarrow\sqrt{a^b+a^c}=\sqrt{2}$

Pentru $a\geq 2\Rightarrow\sqrt{a^b+a^c}=\sqrt{a^{a+2}+a^{a+6}}=\sqrt{a^{a-2}\cdot a^4(1+a^4)}$ …………………………….. **1p**

$a^4(1+a^4)$ produs de două numere consecutive $\Rightarrow\sqrt{a^b+a^c}$ iraţional …………………… **1p**

Subiectul 2.

a) Dacă $x,y>0$, să se arate că $\frac{4}{x+y}\leq\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$.

b) Dacă $a,b,c>0$, să se arate că:

$$\frac{1}{(a+b)^2+(a+c)^2}+\frac{1}{(b+c)^2+(b+a)^2}+\frac{1}{(c+a)^2+(c+b)^2}\leq\frac{1}{8}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right).$$

a) Avem

$\frac{x+y}{2}\geq\frac{2xy}{x+y}\ (m_a\geq m_h)$……………………………………………………………………... **2p**

$\frac{2}{x+y}\leq\frac{1}{2x}+\frac{1}{2y}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{4}{x+y}\leq\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ …………………………………………………….............. **1p**

b) Din a) avem $\frac{4}{(a+b)^2+(a+c)^2}\leq\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(a+c)^2}$ (şi analoagele)…………………………. **1p**

Prin însumare se obţine:

$$\frac{4}{(a+b)^2+(a+c)^2}+\frac{4}{(b+c)^2+(b+a)^2}+\frac{4}{(c+a)^2+(c+b)^2}\leq 2\left[\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right]$$ **1p**

Dar $\sum\frac{1}{(a+b)^2}\leq\sum\frac{1}{4ab}\left(\frac{1}{(a+b)^2}\leq\frac{1}{4ab}\,din\ a)\right)$

$\frac{1}{(a+b)^2+(a+c)^2}+\frac{1}{(b+c)^2+(b+a)^2}+\frac{1}{(c+a)^2+(c+b)^2}\leq\frac{1}{4}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)$ ……….…..... **1p**

$\frac{1}{ab} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)$ $(m_a \ge m_g)$şi analoagele, finalizare.. **1p**

Subiectul 3.

Fie ABCD un romb cu $AB = 6\ cm$ şi $m(\hat{A}) = 45^o$. În punctul O, centrul cercului circumscris triunghiului ABD, se ridică perpendiculara OM pe planul rombului, $OM = 4\ cm$. Aflaţi:

a) Distanţa de la punctul O la planul (MBC).

b) Cosinusul unghiului dintre planele (MBC) şi (ABC).

a) Fie d mediatoarea laturii (AD), iar $\{O\} = d \cap AC$ centrul cercului circumscris triunghiului ABD, $\{N\} = d \cap AD$, $\{P\} = d \cap BC$, $\{R\} = d \cap AB$.

Figura geometrică.. **1p**

Justificarea $MP \perp BC$, $d(O,(MBC)) = OQ$.. **2p**

ΔANR dreptunghic şi isoscel, $AN = NR = 3$, $AR = 3\sqrt{2}$; ΔBPR dreptunghic şi isoscel,

$RB = AB - AR = 3(2-\sqrt{2})$, $RP = PB = 3(\sqrt{2}-1)$ **1p**

$\Delta AON \sim \Delta COP \Rightarrow \frac{NO}{OP} = \frac{AN}{CP} \Leftrightarrow \frac{NO}{OP} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} \Leftrightarrow OP = 3$ **1p**

ΔMOP dreptunghic, $MP = 5$, $OQ = \frac{OM \cdot OP}{MP} = \frac{12}{5}$ **1p**

b) Unghiul dintre planele (MBC) şi (ABC) este $\angle OPM$ (justificare)

$\cos(\angle OPM) = \frac{3}{5}$ **1p**

Subiectul 4.

Fie ABCA'B'C' o prismă triunghiulară regulată dreaptă, cu AB=$4\sqrt{3}$ cm AA'= 12 cm şi P un punct pe CC'.

a) Determinati poziţia punctului P pe CC' ştiind că aria triunghiului PAB este $12\sqrt{6}$ cm^2

b) Determinaţi sinusul unghiului dintre AC şi C`M unde M este mijlocul lui AB.

a) figura **1p**

Ducem CM$\perp$AB $\Rightarrow$ conform teoremei celor trei perpendiculare PM$\perp$AB **1p**

$A_{\Delta PAB} = \frac{PM \cdot AB}{2} \Rightarrow$ PM=$6\sqrt{2}$. Deci, CP=6.. **1p**

b) Ducem MQ$\perp$AC şi cum AA`$\perp$(ABC) $\Rightarrow$ AA`$\perp$MQ$\Rightarrow$MQ$\perp$(ACC`)

Ducem QT$\perp$A'C'.Confrom teoremei celor trei perpendiculare avem că MT$\perp$A`C` **1p**

$A_{\Delta MA`C`} = \frac{A`C`\cdot C`M \cdot \sin(<MC`A`)}{2} = \frac{MT \cdot A`C`}{2}$ **1p**

MT=$3\sqrt{17}$ C`M=$6\sqrt{5}$ **1p**

$\sin(<MPN) = \frac{\sqrt{85}}{10}$ **1p**