

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală – 9 februarie 2013

CLASA a IX- a

BAREM

1. a) Pentru $x = y = z = 1 \Rightarrow m \geq 3$ (1p)

Demonstreaza ca $m = 3$ convine, deci $m = 3$ e numarul cautat(2p)

b) Cum $(x + y + z)^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2) \Rightarrow (5 - t)^2 \leq 3(43 - t^2)$,(1p)

deci $4t^2 - 10t - 104 \leq 0 \Leftrightarrow t \in \left[-4, \frac{13}{2}\right]$ si t este minim, vom verifica daca $t = -4$ ne convine. (1p)

Pentru $t = -4$ avem ca $x^2 + y^2 + z^2 = 3(x + y + z) = 27$, de unde $x = y = z = 3$ este unica solutie

Asadar, solutia problemei este data de $x = y = z = 3, t = -4$. (2p)

2. a) Avem ca $a_{n+2} = (n+4)(n+6)(n+8) \cdot \dots \cdot 3n(3n+2)(3n+4)(3n+6) =$ (1p)

$$a_{n+2} = \frac{a_n}{n+2} \cdot (3n+2)(3n+4)(3n+6) = 3a_n(3n+2)(3n+4), \quad (2p)$$

de unde se obtine concluzia.

b) Vom folosi metoda inductiei matematice. Avem:

$$a_1 = 3:3, a_2 = 4 \cdot 6:3, a_3 = 5 \cdot 7 \cdot 9:3^2, a_4 = 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12:3^2. \quad (1p)$$

Presupunem ca $a_{2k-1} : 3^k$ si $a_{2k} : 3^k, k \in \mathbb{N}^*$. Atunci rezulta ca:

$$a_{2k+1} = 3a_{2k-1} \cdot (6k-1)(6k+1):3^{k+1} \text{ si } a_{2k+2} = 3a_{2k} \cdot (6k+2)(6k+4):3^{k+1}. \quad (2p)$$

Finalizare. (1p)

3. a) Scrie teorema bisectoarei . (1p)

Deduce relatia ceruta (1p)

b) " \Leftarrow " Din ΔABC echilateral $\Rightarrow \overrightarrow{AA'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ si analoagele. (1p)

Stabileste relatia ceruta (1p)

$$" \Rightarrow " \text{ Relatia } \sum \overrightarrow{AA'} = \vec{0} \Leftrightarrow \sum \frac{b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}}{b+c} = \vec{0} \Leftrightarrow \sum \left(\frac{b}{b+c} - \frac{a}{a+c} \right) \overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \left(\frac{b}{b+c} + \frac{b}{a+b} - 1 \right) + \overrightarrow{AC} \left(\frac{c}{b+c} + \frac{c}{c+a} - 1 \right) = \vec{0} \quad (1p)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{b}{b+c} + \frac{b}{a+b} - 1 = 0 \\ \frac{c}{b+c} + \frac{c}{a+c} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = ac \\ c^2 = ab \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^3 = abc \\ c^3 = abc \end{cases} \Rightarrow b = c, b = a \Rightarrow \Delta ABC \text{ echilateral} \quad (2p)$$

$$4. \text{ Avem } a^2 - 2b = a^2 - \frac{a^2 - c^2}{2} = \frac{a^2 + c^2}{2} = \quad (2p)$$

$$= \frac{(a+c)^2 + (a-c)^2}{4} = \quad (2p)$$

$$= \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-c}{2}\right)^2 \quad (*) \quad (1p)$$

Din $a^2 = c^2 + 4b \Rightarrow a$ și c au aceeași paritate (1p)

Atunci $\frac{a+c}{2}, \frac{a-c}{2} \in \mathbb{Z}$ și folosind (*) se obține concluzia. (1p)