

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galați

16 februarie 2013

Clasa a VII-a

Barem de evaluare

- ◆ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- ◆ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Nr. problemei	Soluție, rezolvare	Punctaj
1.	$a = \sqrt{176} - \sqrt{288} + \sqrt{4032} = 4 \cdot \sqrt{11} - 12 \cdot \sqrt{2} + 24\sqrt{7} = 4 \cdot (\sqrt{11} - 3 \cdot \sqrt{2} + 6 \cdot \sqrt{7}).$ $b = -\sqrt{275} + \sqrt{450} - \sqrt{6300} = -5 \cdot \sqrt{11} + 15 \cdot \sqrt{2} - 30 \cdot \sqrt{7} = -5 \cdot (\sqrt{11} - 3 \cdot \sqrt{2} + 6 \cdot \sqrt{7}).$ $c = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{9}-\sqrt{5}}{\sqrt{45}} + \frac{\sqrt{13}-\sqrt{9}}{\sqrt{117}} + \frac{\sqrt{17}-\sqrt{13}}{\sqrt{221}} + \frac{\sqrt{21}-\sqrt{17}}{\sqrt{357}} + \frac{\sqrt{25}-\sqrt{21}}{\sqrt{525}} =$ $= 1 - \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{45}} - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{45}} + \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{117}} - \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{117}} + \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{221}} - \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{221}} +$ $+ \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{357}} - \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{357}} + \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{525}} - \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{525}} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}.$ $c + a : b = \frac{4}{5} - \frac{4}{5} = 0 \in \mathbb{N}.$	<p>2p</p> <p>2p</p> <p>2p</p> <p>1p</p>
2.	<p>a).</p> $BC \parallel AD \xrightarrow{T.F.A} \triangle BOC \sim \triangle DOA \xrightarrow{def} \frac{BC}{AD} = \frac{CO}{AO} = \frac{BO}{OD} \quad (1).$ $EO \parallel BC \xrightarrow{T.Th.} \frac{CO}{AO} = \frac{BE}{EA} \quad (2)$ <p>Din (1) și (2) $\Rightarrow \frac{BC}{AD} = \frac{BE}{EA}.$</p> $\begin{cases} m(\sphericalangle EAD) = m(\sphericalangle EBC) \\ \frac{BE}{EA} = \frac{BC}{AD} \end{cases} \xrightarrow{L.U.L} \triangle BEC \sim \triangle AED.$	<p>1p</p> <p>2p</p>

	<p>b).</p> $\triangle BEC \sim \triangle AED \Rightarrow \angle ECB \equiv \angle EDA \quad (1)$ $\left. \begin{array}{l} BC \parallel EO \\ \text{secanta } EC \end{array} \right\} \Rightarrow \angle ECB \equiv \angle CEO \quad (2)$ $\left. \begin{array}{l} AD \parallel EO \\ \text{secanta } ED \end{array} \right\} \Rightarrow \angle EDA \equiv \angle DEO \quad (3)$ <p>Din (1),(2),(3) $\Rightarrow \angle CEO \equiv \angle DEO \Rightarrow [EO \text{ bisectoarea } \angle DEC.$</p>	<p>1p</p> <p>1p</p>
	<p>c).</p> $EO \parallel BC \xrightarrow{T.F.A} \triangle AEO \sim \triangle ABC \xrightarrow{def.} \frac{EO}{BC} = \frac{AO}{AC} \quad (1)$ $FO \parallel BC \xrightarrow{T.F.A} \triangle DFO \sim \triangle DCB \xrightarrow{def.} \frac{FO}{BC} = \frac{DO}{DB} \quad (2)$ $AD \parallel BC \xrightarrow{T.F.A} \triangle DOA \sim \triangle BOC \xrightarrow{def.} \frac{AO}{OC} = \frac{DO}{OB} \Rightarrow \frac{AO}{AC} = \frac{DO}{DB} \quad (3)$ <p>(1),(2),(3) $\Rightarrow \frac{EO}{BC} = \frac{FO}{BC} \Rightarrow [EO] \equiv [FO].$</p>	<p>1p</p> <p>1p</p>
3.	<p>a).</p> $n = 4 \Rightarrow \sqrt{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot + 1} = 5 \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Q} \text{ sau}$ $n = 5 \Rightarrow \sqrt{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 1} = 11 \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$	1p
	<p>b). Termenii din suma de sub radical sunt numere naturale impare. Numărul numerelor naturale impare de la 1 la 2013 este 1007.</p> $\left. \begin{array}{l} \text{Fie } S = 1 + 3 + 5 + \dots + 2009 + 2011 + 2013 \\ S = 2013 + 2011 + 2009 + \dots + 5 + 3 + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow$ $2 \cdot S = \underbrace{2014 + 2014 + 2014 + \dots + 2014}_{1007 \text{ ori}} \Rightarrow$ $S = 1007^2.$ $\sqrt{1 + 3 + 5 + \dots + 2013} = \sqrt{1007^2} = 1007 \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Q}.$	<p>1p</p> <p>2p</p>
	<p>c)</p> $E = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2013 + 1994 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 996 \cdot 997 \cdot 998 \cdot \dots \cdot 1993 \cdot 1994 \cdot 1995 \cdot \dots \cdot 2013 + 1994 =$ $997^2 \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 996 \cdot 998 \cdot \dots \cdot 1993 \cdot 2 \cdot 1995 \cdot \dots \cdot 2013) + 2 \cdot 997 =$ $997^2 \cdot k + 2 \cdot 997, k \in \mathbb{N}^*.$ <p>Se demonstrează că numărul 997 este număr prim \Rightarrow</p> $E = 997 \cdot (997 \cdot k + 2) = 997 \cdot h, h \in \mathbb{N}^*, 997 \text{ nu divide numărul } h \Rightarrow$ $\sqrt{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2013 + 1994} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2013 + 1994} \text{ nu este număr natural.}$	<p>2p</p> <p>1p</p>

	<p>a).</p> <p>Notăm $m(\angle ACB) = m(\angle EAB) = u^\circ \Rightarrow m(\angle ABC) = 2 \cdot u^\circ$;</p> <p>$\angle ABC$ – unghi exterior triunghiului $ABH \Rightarrow m(\angle AHB) = u^\circ = m(\angle EAB)$.</p> <p>triunghiurile ABH și AHC sunt isoscele.</p>	1p
4)	<p>b).</p> <p>În triunghiul isoscel BHA: $BE \perp AH \Rightarrow BE$ este mediană $\Rightarrow [AE] \equiv [EH]$.</p> <p>În triunghiul dreptunghic ADH: DE este mediană $\Rightarrow DE = \frac{AH}{2} = \frac{AC}{2}$.</p> <p>În triunghiul isoscel ACH: $AD \perp HC \Rightarrow AD$ este mediană $\Rightarrow [HD] \equiv [DC]$.</p> <p>$\left. \begin{array}{l} [AE] \equiv [EH] \\ [HD] \equiv [DC] \end{array} \right\} \Rightarrow [ED]$ este linie mijlocie în triunghiul $AHC \Rightarrow ED \parallel AC$ (1)</p> <p>$\left. \begin{array}{l} [AE] \equiv [DE] \Rightarrow \triangle AED \text{ este isoscel} \\ [EM - \text{bisectoarea } \angle AED \end{array} \right\} \Rightarrow EM \perp AD$</p> <p>$\left. \begin{array}{l} AD \perp EM \\ AD \perp HC \end{array} \right\} \Rightarrow EM \parallel HC \quad (2)$</p> <p>Din (1) și (2) $\Rightarrow MCDE$ este paralelogram.</p>	2p 1p 1p
	<p>c)</p> <p>$P_{MCDE} = 2 \cdot DC + 2 \cdot MC = HC + AC = BC + BH + AC = BC + AB + AC = P_{ABC}$</p>	2p