Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

16 februarie-2013

Clasa a VIII-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

<table>
<tr><th>Nr. problemei</th><th>Soluţie, rezolvare</th><th>Punctaj</th></tr>
<tr><td rowspan="2">1.</td><td>

a) Prin calcul deducem că

$\sqrt{11+6\cdot\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\cdot\sqrt{2}}=\sqrt{9+2\cdot 3\cdot\sqrt{2}+2}-\sqrt{2-2\cdot\sqrt{2}\cdot 1+1}=$

$=\sqrt{3^2+2\cdot 3\cdot\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot 1+1^2}=\sqrt{\left(3+\sqrt{2}\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right.}$

$=3+\sqrt{2}-\left(\sqrt{2}-1\right)=4\in\mathbb{N}$.

Altfel, se poate folosi formula radicalilor dubli (compuşi):

$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$ (se aplică numai dacă $a^2-b\geq 0$)

</td><td>3p</td></tr>
<tr><td>

b).Notăm $S=\frac{1}{2\cdot\sqrt{1}+1\cdot\sqrt{2}}+\frac{1}{3\cdot\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{3}}+...+\frac{1}{100\cdot\sqrt{99}+99\cdot\sqrt{100}}$.

Observăm că termenii sumei sunt de forma

$\frac{1}{(k+1)\cdot\sqrt{k}+k\cdot\sqrt{k+1}}=\frac{(k+1)\cdot\sqrt{k}-k\cdot\sqrt{k+1}}{\left[(k+1)\cdot\sqrt{k}+k\cdot\sqrt{k+1}\right]\cdot\left[(k+1)\cdot\sqrt{k}-k\cdot\sqrt{k+1}\right]}=$

$=\frac{(k+1)\cdot\sqrt{k}-k\cdot\sqrt{k+1}}{(k+1)^2\cdot k-k^2\cdot(k+1)}=\frac{(k+1)\cdot\sqrt{k}-k\cdot\sqrt{k+1}}{k\cdot(k+1)\cdot(k+1-k)}=\frac{(k+1)\cdot\sqrt{k}-k\cdot\sqrt{k+1}}{k\cdot(k+1)}=$

$=\frac{\sqrt{k}}{k}-\frac{\sqrt{k+1}}{(k+1)}=\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}$. Deci,

$\frac{1}{(k+1)\cdot\sqrt{k}+k\cdot\sqrt{k+1}}=\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}$, pentru orice $k\in\mathbb{N}^*$.

Prin urmare, $S=\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{99}}-\frac{1}{\sqrt{100}}=1-\frac{1}{10}=$

ceea ce trebuia demonstrat.

</td><td>2p</td></tr>
</table>

	c). $\sqrt{x^2-8\cdot x+25}+\sqrt{4\cdot x^2+12\cdot x+25}=\sqrt{x^2-2\cdot 4\cdot x+4^2+9}+\sqrt{(2\cdot x)^2+2\cdot(2\cdot x)\cdot 3+3^2+16}=$ $=\sqrt{(2\cdot x)^2+2\cdot(2\cdot x)\cdot 3+3^2+16}=$ $\sqrt{(x-4)^2+9}+\sqrt{(2\cdot x+3)^2+16}>\sqrt{0+9}+\sqrt{0+16}=7,(\forall)x\in\mathbb{R}.$ Precizăm că avem inegalitate strictă deoarece expresiile $x-4$ şi $2\cdot x+3$ nu simultan, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.	**1p** **1p**
2.	**a)** Din triunghiul MAD $\left(m(\sphericalangle MAD)=90^\circ\right)$ obţinem cu teorema lui Pitagora că $MD=10$ cm .	**1p**
	b) Notăm cu O intersecţia diagonalelor rombului $[AC]$ şi $[BD]$. Deoarece $ABCD$ este romb, deducem că $AC\perp BD$. Deci, $MA\perp(ABCD)$ şi $AC\perp BD$, de unde, folosind teorema celor trei perpendiculare obţinem că $MO\perp BD$. Avem că $AO=\dfrac{AB\cdot\sqrt{3}}{2}=4\cdot\sqrt{3}$ şi din triunghiul ΔMOA $\left(m(\sphericalangle MAO)=90^\circ\right)$ obţinem cu teorema lui Pitagora că $MO=\sqrt{84}$ cm $=2\cdot\sqrt{21}$ cm . Din $MO\perp BD$ şi $AO\perp BD$ obţinem $BD\perp(MAO)$, deci $(MOA)\perp(MBD)$. Ducem $AE\perp MO,\ E\in MO$ şi din relaţiile $(MOA)\cap(MBD)=MO$, $(MOA)\perp(MBD)$, deducem că $AE\perp(MBD)$, de unde obţinem că distanţa de la M la planul (MBD) este egală cu lungimea segmentului $[AE]$. Din triunghiul ΔMOA $\left(m(\sphericalangle MAO)=90^\circ\right)$ deducem că $AE=\dfrac{MA\cdot AO}{MO}=\dfrac{6\cdot 4\sqrt{3}}{2\cdot\sqrt{21}}=\ =\dfrac{12}{\sqrt{7}}=\dfrac{12\cdot\sqrt{7}}{7}.$	**2p** 1p

	c) Ducem $AN \perp BC,\ N \in BC$. Avem că $MA \perp (ABCD)$ şi $AN \perp BC$, de unde obţinem, folosind teorema celor trei perpendiculare, că $MN \perp BC$. Deci, distanţa de la M la BC este egală cu lungimea segmentului $[MN]$. Deoarece triunghiul ΔABD este echilateral deducem că $AM = 4 \cdot \sqrt{3}$. Din triunghiul ΔMAN $\left(m(\sphericalangle MAN) = 90^\circ\right)$ obţinem cu teorema lui Pitagora că $MN = 2 \cdot \sqrt{21}$ cm.	**1p** **2p**
3.	a). $(a^3+1)\cdot(b^3+1) \geq (a^2 \cdot b+1)\cdot(b^2 \cdot a+1) \Leftrightarrow$ $a^3 \cdot b^3 + a^3 + b^3 + 1 \geq a^3 \cdot b^3 + a^2 \cdot b + b^2 \cdot a + 1 \Leftrightarrow$ $a^3 + b^3 \geq a^2 \cdot b + b^2 \cdot a \Leftrightarrow$ $(a+b)\cdot(a^2 - a \cdot b + b^2) \geq a \cdot b \cdot (a+b) \Leftrightarrow a^2 - a \cdot b + b^2 \geq a \cdot b \Leftrightarrow$ $(a-b)^2 \geq 0 (A)$	**1p** 1p 1p
	b). $a^3 \cdot b^3 + 1 \geq a \cdot b \cdot (a+b) \Leftrightarrow a^3 \cdot b^3 + 1 \geq a^2 \cdot b + a \cdot b^2 \Leftrightarrow$ $a^3 \cdot b^3 + 1 - a^2 \cdot b - a \cdot b^2 \geq 0 \Leftrightarrow$ $a^2 \cdot b \cdot (a \cdot b^2 - 1) - (a \cdot b^2 - 1) \geq 0 \Leftrightarrow$ $(a \cdot b^2 - 1)\cdot(a^2 \cdot b - 1) \geq 0.$ În cazul $a, b \geq 1 \Rightarrow a^2 \cdot b \geq 1,\ a \cdot b^2 \geq 1 \Rightarrow (a^2 \cdot b - 1)\cdot(a \cdot b^2 - 1) \geq 0 (A).$ În cazul $a, b \leq 1 \Rightarrow a^2 \cdot b \leq 1,\ a \cdot b^2 \leq 1 \Rightarrow (a^2 \cdot b - 1)\cdot(a \cdot b^2 - 1) \geq 0 (A).$	**1p** **1p** **1p** **1p**

<table>
<tr><td>4.</td><td>
a)
Fie A′B ∩ AM = $\{E\}$
$MB \parallel AA' \Rightarrow \triangle AA'E \sim \triangle MBE \Rightarrow \frac{MB}{AA'} = \frac{ME}{EA} = \frac{BE}{EA'} = \frac{1}{2}.$
$\triangle ABM\left(m\left(\measuredangle ABM\right) = 90^\circ\right) \Rightarrow AM^2 = a^2 + \frac{2a^2}{4} \Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{6}}{2};$
$\triangle AA'B\left(m\left(\measuredangle A'AB\right) = 90^\circ\right) \Rightarrow A'B = a\sqrt{3}$
$\frac{ME}{EA} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AM}{AE} = \frac{3}{2} \Rightarrow AE = \frac{a\sqrt{6}}{3};$
$\frac{BE}{EA'} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{BE}{BA'} = \frac{1}{3} \Rightarrow BE = \frac{a\sqrt{3}}{3};$
$AE^2 = \frac{6a^2}{9}$
$BE^2 = \frac{3a^2}{9}$
$\left.\begin{array}{l} AE^2 = \frac{6a^2}{9} \\ BE^2 = \frac{3a^2}{9} \\ AB^2 = a^2 \end{array}\right\} \overset{R.T.P}{\Rightarrow} A'B \perp AM.$
$\left.\begin{array}{l} DA \perp \left(AA'B'B\right) \\ A'B \subset \left(AA'B'B\right) \end{array}\right\} \Rightarrow DA \perp A'B;$
$\left.\begin{array}{l} DA \perp A'B \\ A'B \perp AM \\ DA \cap AM = \{A\} \end{array}\right\} \Rightarrow A'B \perp \left(AMD\right).$
</td><td>
1p

1p
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>

b)

$A'O \subset (A'BD)$;

$\left.\begin{array}{l} A'B \cap AM = \{E\} \\ A'D \cap AN = \{F\} \end{array}\right\} \Rightarrow (A'BD) \cap (AMN) = EF$

$\frac{A'E}{EB} = \frac{2}{1} = \frac{A'F}{FD} \overset{R.T.Th.}{\overbrace{\Rightarrow}} EF \parallel BD \parallel MN$;

$\triangle A'BD$: $A'O$ este mediana

$A'O \cap EF = \{G\}$;

$GE \parallel OB \Rightarrow \frac{A'E}{EB} = \frac{2}{1} = \frac{A'G}{GO} \Rightarrow$

G este centrul de greutate al triunghiului $\triangle A'BD$.

</td><td>2p</td></tr>
<tr><td></td><td>

Fie $A'C' \cap B'D' = \{O'\}$

$OO' \cap MN = \{O''\}$

$AO'' \cap EF = \{G'\}$

$G'E \parallel O''M \overset{TFA}{\overbrace{\Rightarrow}} \frac{AE}{AM} = \frac{AG'}{AO''} = \frac{G'E}{O''M} = \frac{2}{3} \Rightarrow$

G' este centrul de greutate al triunghiului $\triangle ANM$.

$\left.\begin{array}{l} \frac{G'E}{O''M} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{G'E}{OB} = \frac{2}{3} \\ Dar\ \frac{GE}{OB} = \frac{2}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{G'E}{OB} = \frac{GE}{OB} \Rightarrow$

$G'E = GE, G, G' \in [EF] \Rightarrow G = G'$

Aşadar, cele două triunghiuri au acelaşi centru de greutate.

</td><td>1p</td></tr>
</table>

	c). $\left.\begin{array}{l}(AA'D'D) \parallel (BB'C'C) \\ (AMD)\cap(BB'C'C) = MT, T \in CC' \\ (AMD)\cap(AA'D'D) = AD\end{array}\right\} \Rightarrow MT \parallel AD;$ $\left.\begin{array}{l}MT \parallel AD \\ [BM] \equiv [MB']\end{array}\right\} \Rightarrow [CT] \equiv [TC'].$ $\left.\begin{array}{l}(AA'B'B) \parallel (DD'C'C) \\ (ANB)\cap(DD'C'C) = NT, T \in CC' \\ (ANB)\cap(AA'B'B) = AB\end{array}\right\} \Rightarrow NT \parallel AB;$ $(AMTD)\cap(ANTB) = AT;$ $\left.\begin{array}{l}A'B \perp (AMTD) \\ AT \subset (AMTD)\end{array}\right\} \Rightarrow AT \perp A'B;$ $\left.\begin{array}{l}DB \perp AC \\ DB \perp TC \\ AC \cap TC = \{C\}\end{array}\right\} \Rightarrow DB \perp (TAC);$ $\left.\begin{array}{l}DB \perp (TAC) \\ TA \subset (TAC)\end{array}\right\} \Rightarrow TA \perp DB;$ $\left.\begin{array}{l}AT \perp A'B \\ TA \perp DB \\ A'B \cap DB = \{B\}\end{array}\right\} \Rightarrow AT \perp (A'BD).$	**1p** 1p