INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN CARAŞ-SEVERIN

CARAŞ-SEVERIN

MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE

Olimpiada de matematică
Etapa locală, Caraş-Severin, 16.02.2013

Clasa a X-a
BAREME

Problema 1:

Aplică Cauchy Schwarz $\frac{a^2}{ab+a}+\frac{b^2}{bc+b}+\frac{1^2}{c+a}+\frac{c^2}{ac+cb}\geq\frac{(a+b+c+1)^2}{2bc+ab+ac+2a+b+c}$ 1pct

Egalitatea se scrie $\frac{\log_2 x}{1+\log_2 y}+\frac{\log_2 y}{1+\log_2 5}+\frac{1}{\log_2 5+\log_2 x}+\frac{\log_2 5}{\log_2 x+\log_2 y}=2$................................1pct

Notăm şi obţinem $\frac{a}{b+1}+\frac{b}{c+1}+\frac{1}{c+a}+\frac{c}{a+b}=2$ 1pct

Aplică a) şi obţine $2\geq\frac{(a+b+c+1)^2}{2bc+ab+ac+2a+b+c}$ ....1 pct

Ceea ce este echivalent cu $(a-1)^2+(b-c)^2\leq 0$ 2pct

Obţine $a=1$ şi $b=c$, apoi $x=2$ şi $y=5$ 1pct

Problema 2:

Scrie cum forma $S=\sum\frac{1+\frac{1}{z}}{1+z}=\frac{1}{z}+\frac{1}{y}+\frac{1}{x}$ 3pct

Foloseşte inegalitatea mediilor şi obţine $S\geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}=3$ 4pct

Problema 3:

Foloseşte ipoteza şi obţine $\frac{a}{c}=\overline{\left(\frac{a}{c}\right)}$, deci $\frac{a}{c}\in\mathbb{R}\Rightarrow A,C,O$ coliniare...1pct

Analog obţine că B,D,O coliniare, deci O este intersecţia diagonalelor patrulaterului $ABCD$........................1pct

Deduce $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$ are direcţia diagonalei AC, iar suma $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$ are direcţia diagonalei BD 1pct

Egalitatea $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$ este posibilă dacă $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$, ...2pct

Deduce că O -mij fiecărei diagonale, aşadar $ABCD$ este paralelogram..2pct

Problema 4:

Inlocuieste x cu $3x$ şi obţine $f(x)\leq\log_3 x-1$, $g(x)\leq\log_3 x+1$..2pct

Observă că $f(x)\geq\log_3 x-1$ şi $g(x)\geq\log_3 x+1$, $\forall x\in(0,\infty)$ 3pct

Obţine că $f(x)=\log_3 x-1$ şi $g(x)=\log_3 x+1$ 2pct

Strada Ateneului Nr. 1, 320112
REŞIŢA – ROMANIA
Tel: 0255/214238; Fax: 0255/216042
e-mail: isjcaras@gmail.com
http://cs.isj.edu.ro

Str. General Berthelot nr. 28-30, Sector 1
010168, Bucuresti
Tel: +40 (0)21 405 57 06
Fax: +40 (0)21 310 32 05
www.edu.ro