Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

16 februarie 2013

Clasa a X-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. problemei	**Soluţie, rezolvare**	**Punctaj**
	a). $11+6\sqrt{2}=\left(3+\sqrt{2}\right)^2$.	**1p**
	$\left(11+6\sqrt{2}\right)^x=6\cdot\left(3+\sqrt{2}\right)^x-7 \Leftrightarrow \left(3+\sqrt{2}\right)^{2\cdot x}=6\cdot\left(3+\sqrt{2}\right)^x-7.$ Notăm $\left(3+\sqrt{2}\right)^x=t, t>0$. $t^2=6\cdot t-7 \Leftrightarrow t^2-6\cdot t+7=0 \Rightarrow t_1=3+\sqrt{2}; t_2=3-\sqrt{2};$	**1p**
	Ecuaţia devine $\left(3+\sqrt{2}\right)^x=3+\sqrt{2} \Leftrightarrow x=1;$ $\left(3+\sqrt{2}\right)^x=3-\sqrt{2} \Leftrightarrow \left(3+\sqrt{2}\right)^x=\frac{1}{3+\sqrt{2}} \Leftrightarrow x=\frac{\lg(3-\sqrt{2})}{\lg(3+\sqrt{2}}.$ Soluţiile ecuaţiei sunt: 1 şi $\frac{\lg(3-\sqrt{2})}{\lg(3+\sqrt{2}}$.	**1p**

	b). $\left(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n=\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)^n=\cos\dfrac{2n\pi}{3}+i\sin\dfrac{2n\pi}{3};$ $\left(\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n=\left(\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)^n=\cos\dfrac{4n\pi}{3}+i\sin\dfrac{4n\pi}{3};$ $\cos\dfrac{2n\pi}{3}+i\sin\dfrac{2n\pi}{3}+\cos\dfrac{4n\pi}{3}+i\sin\dfrac{4n\pi}{3}=$ $2\cos(n\pi)\cdot\cos\left(\dfrac{n\pi}{3}\right)+2i\sin(n\pi)\cdot\cos\left(\dfrac{n\pi}{3}\right)=2\cdot(-1)^n\cdot\cos\left(\dfrac{n\pi}{3}\right);$ $2\cdot(-1)^n\cdot\cos\left(\dfrac{n\pi}{3}\right)=2\Leftrightarrow(-1)^n\cdot\cos\left(\dfrac{n\pi}{3}\right)=1\Rightarrow$ $\cos\left(\dfrac{n\pi}{3}\right)=(-1)^n\Rightarrow\dfrac{n\pi}{3}=k\pi\Rightarrow n=3k,k\in\mathbb{Z}$	**1p** **1p** **1p** **1p**
2.	a). Fie $\lvert z_A\rvert=\lvert z_A-z_B\rvert=\lvert z_B\rvert\Leftrightarrow\lvert a+ib\rvert=\lvert(a-b)\cdot(1+i)\rvert\Leftrightarrow$ $\sqrt{a^2+b^2}=\lvert a-b\rvert\cdot\sqrt{2}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a^2+b^2-4ab=0\Leftrightarrow(a-2b)^2=3b^2\Leftrightarrow$ $\lvert a-2b\rvert=b\sqrt{3}\Leftrightarrow a=2b\pm b\sqrt{3}\Leftrightarrow a=b\cdot\left(2\pm\sqrt{3}\right).$ Există două relaţii ce satisfac condiţia $a>b$. 1. $a=b\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)\Rightarrow z_A=b\cdot\left(2+\sqrt{3}+i\right)$ *sau* $z_A=2\cdot\lvert b\rvert\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right);$ $\lvert z_A\rvert=\lvert b\rvert\cdot\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2+1}=2\cdot\lvert b\rvert\sqrt{2+\sqrt{3}}.$ 2. $a=b\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)\Rightarrow z'_A=b\cdot\left(2-\sqrt{3}+i\right)$ *sau* $z'_A=2\cdot\lvert b\rvert\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\left(\cos\dfrac{7\pi}{12}+i\sin\dfrac{7\pi}{12}\right);$ $\lvert z'_A\rvert=\lvert b\rvert\cdot\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2+1}=2\cdot\lvert b\rvert\sqrt{2+\sqrt{3}}.$ Analog, $z_B=b\cdot\left(1+\left(2+\sqrt{3}\right)\cdot i\right)$ si $z'_B=b\cdot\left(1+\left(2-\sqrt{3}\right)\cdot i\right).$ Există 2 triunghiuri echilaterale.	**2p** **1p**

	Din $S_{AOB}=\sqrt{3}\ cm^2 \Rightarrow l=2\ cm \Rightarrow \lvert a-b\rvert\cdot\sqrt{2}=2 \Leftrightarrow \lvert a-b\rvert=\sqrt{2}$. Dar pentru $a=b\left(2+\sqrt{3}\right)$, se obţine: $a-b=b\cdot\left(1+\sqrt{3}\right)\Rightarrow\lvert a-b\rvert=\lvert b\rvert\cdot\left(1+\sqrt{3}\right)=\sqrt{2}\Rightarrow$ $\lvert b\rvert=\frac{\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\Rightarrow b_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\Rightarrow a_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)$. Astfel, $z_A=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\sqrt{3}+1+i\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)\right)$ şi $z'_A=-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\sqrt{3}+1+i\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)\right)$, $z_B=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\sqrt{3}-1+i\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)\right)$, $z'_B=-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\sqrt{3}-1+i\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)\right)$.	**1p** **1p**
	b). Fie $z_D=x+iy, x,y\in\mathbb{R}$ Din $[AD]\equiv[BA]\Leftrightarrow\lvert z_A-z_D\rvert=\lvert z_B-z_A\rvert\Rightarrow(x-a)^2+(y-b)^2=2\cdot(a-b)^2$ (1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{AD}=(x-a)\cdot\vec{i}+(y-b)\cdot\vec{j}$; $\overrightarrow{AB}=(b-a)\cdot\vec{i}+(a-b)\cdot\vec{j}$; $(x-a)\cdot(b-a)+(y-b)\cdot(a-b)=0, b\neq0\Rightarrow x-y+b-a=0$ (2) Din (1), (2) $\Rightarrow$ $\begin{cases}x=2a-b\\y=a\end{cases}\Rightarrow z_D=2a-b+i\cdot a$; sau $\begin{cases}x=b\\y=2b-a\end{cases}\Rightarrow z'_D=b+i\cdot(2b-a)$ dar $z_A+z_C=z_D+z_B\Rightarrow z_C=z_D+z_B-z_A\Rightarrow z_C=a+i\cdot(2\cdot a-b)$; Analog, $z_{C'}=2\cdot b-a+b\cdot i$ $\begin{cases}z_C=b\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{3}\cdot i\right)\\z_D=b\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{3}+i\right)\end{cases}$; $\begin{cases}z_{C'}=b\cdot\left(-\sqrt{3}+i\right)\\z_{D'}=b\cdot\left(1-i\cdot\sqrt{3}\right)\end{cases}$	1p 1p

3	$\left.\begin{array}{l} b^n \le x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n \\ a \in (0,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \log_a b^n \ge \log_a (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n) \Leftrightarrow$	**3p**
	$\log_a b^n \ge \log_a x_1 + \log_a x_2 + \log_a x_3 + \ldots + \log_a x_n \Rightarrow$ $\log_a b \ge \dfrac{\log_a x_1 + \log_a x_2 + \log_a x_3 + \ldots + \log_a x_n}{n}$.	
	$\log_a x_i > 0 = \log_a 1, (\forall) i = \overline{1,n}$, deoarece numerele $a, x_i \in (0,1), (\forall) i = \overline{1,n}$	**1p**
	Se aplică inegalitatea mediilor: $\log_a b \ge \dfrac{\log_a x_1 + \log_a x_2 + \ldots + \log_a x_n}{n} \ge \sqrt[n]{\log_a x_1 \cdot \log_a x_2 \cdot \ldots \log_a x_n} \Rightarrow$ $\log_a b \ge \sqrt[n]{\log_a x_1 \cdot \log_a x_2 \cdot \log_a x_3 \cdot \ldots \log_a x_n}$	**2p**
	Ridicând ambii membri la puterea a n-a, se obţine inegalitatea cerută.	**1p**

4.	**Metoda 1.** Deoarece $f(1)=2$, vom lua $y=1,(\forall)x\in\mathbb{Z}$. Se obţine: $f(x+1)+f(x)=f(x)\cdot f(1)+1,(\forall)x\in\mathbb{Z}\Rightarrow f(x+1)=f(x)+1,(\forall)x\in\mathbb{Z}.$	**2p**
	Demonstrăm prin inducţie matematică $P(n): f(x+n)=f(x)+n,(\forall)n\in\mathbb{N}^*,(\forall)x\in\mathbb{Z}$ $P(1)$ este adevărată; Presupunem $\mathrm{P}(n)$ adevărată ; Dar $\mathrm{f}(x+n+1)=f((x+n)+1)=f(x+n)+1=f(x)+n+1\Rightarrow$ $P(n+1)$adevărată ; În concluzie $\mathrm{f}(x+n)=f(x)+n,(\forall)n\in\mathbb{N}^*,(\forall)x\in\mathbb{Z}$ (1)	2p
	În această relaţie $x\Rightarrow x\text{ - }n\Rightarrow f(x)=f(x-n)+n\Rightarrow$ $f(x-n)=\mathrm{f}(x)-n$ (2) Din $(1) si (2)\Rightarrow \mathrm{f}(x+k)=f(x)+k,(\forall)k\in\mathbb{Z},(\forall)x\in\mathbb{Z}$. Luând x=0 $\Rightarrow \mathrm{f}(k)=f(0)+k;$ Pentru $k=1\Rightarrow f(1)=f(0)+1\Rightarrow f(0)=1.$ În concluzie $\mathrm{f}(x)=x+1,(\forall)x\in\mathbb{Z}$ Verificăm condiţiile problemei $f(x+y)+f(x\cdot y^2)=f(x)\cdot f(y^3)+1,\ (\forall)x,y\in\mathbb{Z}$ pentru funcţia găsită: $f(x)=x+1, x\in\mathbb{Z}$ Egalitatea devine: $x+y+1+y^2x+1=(x+1)\cdot(y^3+1)+1\Leftrightarrow y+y^2x=xy^3+y^3.$	2p
	Pentru x=0 şi y=2, obţinem 2=8(fals) $\Rightarrow$ nu există funcţii care să verifice condiţiile problemei.	1p

	Metoda 2. $f(x+y)+f(x\cdot y^2)=f(x)\cdot f(y^3)+1,\ (\forall)x,y\in\mathbb{Z}$ $Fie\ \begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}\Rightarrow f(1)+f(0)=f(0)\cdot f(1)+1\Rightarrow$ $2+f(0)=2\cdot f(0)+1\Rightarrow f(0)=1;$ $Fie\ \begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases}\Rightarrow f(0)+f(1)=f(1)\cdot f(-1)+1\Rightarrow$ $1+2=2\cdot f(-1)+1\Rightarrow f(-1)=1;$ $Fie\ \begin{cases}x=-1\\y=1\end{cases}\Rightarrow f(0)+f(-1)=f(-1)\cdot f(1)+1\Rightarrow$ $2=3(fals)\Rightarrow$ nu există funcţii f cu proprietăţile date.	**2p** **2p** **2p** **1p**