Olimpiada de matematică
Etapa locală, Caraş-Severin, 16.02.2013

Clasa a XI-a
BAREME

Problema 1:

$(BA+C^2)-\varepsilon(CA-BC-C^2)=I_n$ ....3 pct

Cum A,B,C matrici elementare reale, rezultă $CA-BC-C^2=O_n$ şi $BA+C^2+\frac{1}{2}O_n=I_n$ 2pct

Obţine că $AB=BA$ 2pct

Problema 2:

Din $(x_n-n)^2\le 1$ deducem $n-1\le x_n\le n+1$ 3pct

Aplică teorema cleştelui şi obţine $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=1$. 4pct

Problema 3:

Deoarece $\det A=0$, obţine $AA^*=O_n$ 1pct

Foloseşte ineg. lui Sylvester şi obţine $rangA+rangA^*-n\le rangAA^*=0\Rightarrow rangA^*\le 1$ 2pct

Consideră funcţia $f(x)=\det(B+xA^*)=\det B+x\sum\limits_{i,j=1}^{n}A_{ji}B_{ij}$, $A_{ji};B_{ij}$ complemenţi algebrici..........2pct

Cum $f(1)=f(-1)$, rezultă f constantă, $\det B=f(0)=f(1)=1$ 2pct

Problema 4:

exemplu de matrici A şi B, verificare..........1pct
exemplu de matrice B, verificare..........1pct
Foloseşte relaţia HC şi deduce $trA=trB=0$ 2pct
Apoi $tr(A+B)=trA+trB$ ....2 pct
Deci $(A+B)^2=\mu I_2\Leftrightarrow A^2+B^2+AB+BA=\mu I_2\Leftrightarrow AB+BA=\lambda I_2$..........1pct