

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galați

16 februarie 2013

Clasa a XI-a

Barem de evaluare

- ◆ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- ◆ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Nr. problemei	Soluție, rezolvare	Punctaj
1.	<p>Aducem la forma cea mai simplă expresia dată. Se adună toate coloanele la prima coloană. Se scoate factor comun și se obține:</p> $E(x, k) = 2 \cdot (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{k}) \cdot \begin{vmatrix} 1 & \sqrt[3]{k} & \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{k} \\ 1 & \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{k} & \sqrt[3]{x} \\ 1 & \sqrt[3]{x} & \sqrt[3]{k} \end{vmatrix}.$ <p>Se scade din linia a doua prima linie și din a treia linie scădem a doua linie.</p> <p>Obținem:</p> $E(x, k) = 2 \cdot (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{k}) \cdot \begin{vmatrix} 1 & \sqrt[3]{k} & \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{k} \\ 0 & \sqrt[3]{x} & -\sqrt[3]{k} \\ 0 & -\sqrt[3]{k} & \sqrt[3]{k} - \sqrt[3]{x} \end{vmatrix} =$ $= 2(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{k})(\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{k} - \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{k^2}) = -2(x + k);$ <p>a)</p> $E(-k, k) = \begin{vmatrix} -\sqrt[3]{k} & \sqrt[3]{k} & 0 \\ \sqrt[3]{k} & 0 & -\sqrt[3]{k} \\ 0 & -\sqrt[3]{k} & \sqrt[3]{k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \sqrt[3]{k} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt[3]{k} \\ 0 & -\sqrt[3]{k} & \sqrt[3]{k} \end{vmatrix} = 0.$ <p>$E(\sin^2 \alpha, \cos^2 \alpha) = -2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = -2, (\forall) \alpha \in \mathbb{R}$</p> <p>b) Folosind (1), obținem:</p> $-2(x+1) - 2(x+2) - \dots - 2(x+2013) \geq 0 \Rightarrow$ $2013x + (1+2+\dots+2013) \leq 0 \Rightarrow x \leq -1007.$	<p>3p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>2p</p>

<p>2.</p>	<p>a) Metoda 1.</p> $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[k]{x} - \sqrt[k+2]{x}}{\sqrt[k+1]{x} - \sqrt[k+3]{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{\frac{1}{k}} - x^{\frac{1}{k+2}}}{x^{\frac{1}{k+1}} - x^{\frac{1}{k+3}}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{\frac{1}{k+2}} \cdot \left(x^{\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}} - 1 \right)}{x^{\frac{1}{k+3}} \cdot \left(x^{\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3}} - 1 \right)} =$ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{\frac{2}{(k+2) \cdot k}} - 1}{x^{\frac{2}{(k+1) \cdot (k+3)}} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\left(x^{\frac{1}{(k+2) \cdot k}} \right)^2 - 1}{\left(x^{\frac{1}{(k+1) \cdot (k+3)}} \right)^2 - 1} =$ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\left(x^{\frac{1}{(k+2) \cdot k}} - 1 \right) \cdot \left(x^{\frac{1}{(k+2) \cdot k}} + 1 \right)}{\left(x^{\frac{1}{(k+1) \cdot (k+3)}} - 1 \right) \cdot \left(x^{\frac{1}{(k+1) \cdot (k+3)}} + 1 \right)} =$ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{\frac{1}{(k+2) \cdot k}} - 1}{x^{\frac{1}{(k+1) \cdot (k+3)}} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{\frac{1}{(k+2) \cdot k}} - 1}{x^{\frac{1}{(k+1) \cdot (k+3)}} - 1} =$ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[(k+2) \cdot k]{x} - 1}{\sqrt[(k+1) \cdot (k+3)]{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\sqrt[(k+2) \cdot k]{x} - 1 \right) \left(\frac{1}{\sqrt[(k+1) \cdot (k+3)]{x} - 1} \right) =$ $\frac{1}{(k+2) \cdot k} \cdot \frac{(k+1) \cdot (k+3)}{1} = \frac{(k+1) \cdot (k+3)}{(k+2) \cdot k}.$	<p>2p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>
	<p>Metoda 2.</p> <p>Folosind $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[m]{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)}{(x - 1) \left(\sqrt[m]{x^{m-1}} + \sqrt[m]{x^{m-2}} + \dots + \sqrt[m]{x} + 1 \right)} = \frac{1}{m}, m \geq 2,$</p> <p>se obține:</p> $E(k) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\sqrt[k]{x} - 1}{x - 1} - \frac{\sqrt[k+2]{x} - 1}{x - 1}}{\frac{\sqrt[k+1]{x} - 1}{x - 1} - \frac{\sqrt[k+3]{x} - 1}{x - 1}} = \frac{\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}}{\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3}} =$ $\frac{2}{k(k+2)} \cdot \frac{(k+1)(k+3)}{2} = \frac{(k+1)(k+3)}{k(k+2)}$	<p>1p</p> <p>2p</p> <p>2p</p>

	<p>b) $P = E(2) \cdot E(3) \cdot E(4) \cdot \dots \cdot E(2n) \cdot E(2n+1) =$</p> $= \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} \cdot \frac{4 \cdot 6}{3 \cdot 5} \cdot \frac{5 \cdot 7}{4 \cdot 6} \cdot \dots \cdot \frac{(2n+1)(2n+3)}{2n(2n+2)} \cdot \frac{(2n+2)(2n+4)}{(2n+1)(2n+3)} =$ $= \frac{(2n+2)(2n+4)}{2 \cdot 4} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{2m}{2} = m \in \mathbf{N}^*, m \in \mathbf{N}^*,$ <p>deoarece</p> <p>$(n+1)(n+2) = 2m = \text{nr. par}$ (fiind produs de două numere naturale consecutive).</p>	<p>1p</p> <p>1p</p>
<p>3.</p>	$\sqrt{n \cdot x_n + n + 1} - \sqrt{n \cdot x_n + 1} \leq \frac{\sqrt{n}}{2} \leq \sqrt{n \cdot x_n + n} - \sqrt{n \cdot x_n}, (\forall) n \geq 1. \Leftrightarrow$ $\frac{n}{\sqrt{n \cdot x_n + n + 1} + \sqrt{n \cdot x_n + 1}} \leq \frac{\sqrt{n}}{2} \leq \frac{n}{\sqrt{n \cdot x_n + n} + \sqrt{n \cdot x_n}} \Leftrightarrow$ $\sqrt{x_n + 1} + \sqrt{x_n} \leq 2 \leq \sqrt{x_n + \frac{n+1}{n}} + \sqrt{x_n + \frac{1}{n}} \quad (1)$ <p>Fie funcția $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x}$.</p> <p>Relația (1) se scrie: $f(x_n) \leq f\left(\frac{9}{16}\right) \leq f\left(x_n + \frac{1}{n}\right)$.</p> <p>Funcția f este strict crescătoare pe</p> $[0, \infty) \Rightarrow x_n \leq \frac{9}{16} \leq x_n + \frac{1}{n} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{9}{16} - x_n \leq \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{9}{16}.$	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>2p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>

4.	$A \cdot B - B \cdot A = A \Leftrightarrow A \cdot B = B \cdot A + A \Leftrightarrow A \cdot B = (B + I_2) \cdot A \quad (1)$	1p
	$BA = A \cdot (B - I_2) \quad (2)$	
	<p>Analizăm cazurile:</p>	
	<p>I. $\det A \neq 0.$</p>	
	<p>Din (1) și (2) $\Rightarrow \det A \cdot \det B = \det(B + I_2) \cdot \det A$ și $\det B \cdot \det A = \det A \cdot \det(B - I_2);$</p>	1p
	$\begin{cases} \det B = \det(B + I_2) \\ \det B = \det(B - I_2) \end{cases} \quad (3)$	
<p>Considerăm $\det(B - xI_2) = \det B - \alpha \cdot x + x^2.$</p>		
<p>Relațiile (3) devin:</p>		
$\begin{cases} \det B = \det B + \alpha + 1 \\ \det B = \det B - \alpha + 1 \end{cases} \Rightarrow -1 = 1(F).$	1p	
<p>II. $\det A = 0, \operatorname{Tr}(AB - BA) = \operatorname{Tr}A \Rightarrow \operatorname{Tr}A = 0 \Rightarrow A^2 = O_2.$</p>		
$A \cdot B \cdot A = B \cdot A^2 + A^2 = O_2;$	1p	
<p>In relația din enunț, avem: $A \cdot B = B \cdot A + A / \cdot (B \cdot A) \Rightarrow$</p>		
$A \cdot B^2 \cdot A = B \cdot (A \cdot B \cdot A) + A \cdot B \cdot A = O_2.$	1p	
<p>Demonstrăm prin inducție matematică $A \cdot B^n \cdot A = O_2, (\forall) n \geq 1.$</p>		
<p>Presupunem că $A \cdot B^n \cdot A = O_2.$</p>	2p	
$AB = BA + A / \cdot (B^n \cdot A) \Rightarrow A \cdot B^{n+1} \cdot A = B(A B^n A) + A B^n A = O_2.$		
<p>În concluzie $A \cdot B^n \cdot A = O_2, (\forall) n \geq 1.$</p>		