Olimpiada de matematică
Etapa locală, Caraş-Severin, 16.02.2013

Clasa a XII-a
BAREME

Problema 1:

a)Demonstrează formula $tg(a+b)=\dfrac{tga+tgb}{1-tga\cdot tgb}$ ……………………………………………………2pct

b)Foloseşte a) si deduce $a+b=arctg\left(\dfrac{tga+tgb}{1-tga\cdot tgb}\right)$ 1pct

Consideră $a=arctgx, b=arctg(1-x)$ şi ajunge la identitatea $arctgx+arctg(1-x)=arctg\dfrac{1}{x^2-x+1}$ ……….1pct

Foloseşte schimbarea de variabilă $t=1-x$, $I=\int_1^0\dfrac{arctg(1-t)}{arctgt+arctg(1-t)}(-1)dt=\int_0^1\dfrac{arctg(1-t)}{arctgt+arctg(1-t)}dt=J$ …1pct

Observăm că $I+J=2I=1\Rightarrow I=\dfrac{1}{2}$ ……………………………………………………………….…2pct

Problema 2:
Definiţia izomorfismului...2 pct
Se arată f morfism...1 pct
Se arată f injectivă...1 pct
Se arată f surjectivă...1 pct

Problema 3:

Avem că $f(x)=F'(x)=e^{x-F(x)}(1-f(x))$ ………………………………………………………..3pct

De unde $f(x)(1-f(x))=e^{x-F(x)}(1-f(x))^2\geq 0$ ……………………………………………………..1pct

Obţine că $f(x)\in[0;1]$ 1pct

Obţine limita $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$ 2pct

Problema 4:

a) Da,de exemplu $G=\{e,a,b\}$ cu $a^2=b, b^2=a$ şi alcătuieşte tabla operaţiei.......................................2pct

Presupune prin (RA) că există exact două elem. cu prop. din enunţ; deduce $ab\neq a, ab\neq b, ab\neq e$ (...)............1pct

Observă că $a(ab)=a(ba)=(ab)a$ şi $(ab)b=(ba)b=b(ab)$ 1pct

Dacă unul dintre elementele aba sau bab este e , celălalt este diferit de e..1pct

Există aşadar cel puţin trei elemente a,b,ab cu proprietatea din enunţ,absurd...2pct