Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

16 februarie 2013

Clasa a XII-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. problemei	Soluţie, rezolvare	Punctaj
	a) Trebuie să avem că $F'(x)=f(x)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$	**1p**
	Prin calcul, deducem că $F'(x)=(a\cdot b\cdot x+a+b)\cdot e^{b\cdot x+2}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.	**1p**
	Din relaţiile $F'(0)=f(0)\Leftrightarrow(a+b)\cdot e^2=4\cdot e^2\Leftrightarrow a+b=4$ şi $F'(-1)=f(-1)\Leftrightarrow(-a\cdot b+a+b)\cdot e^{-b+2}=0\Leftrightarrow -a\cdot b+a+b=0$, obţinem sistemul $\begin{cases}a+b=4\\a\cdot b=a+b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=4\\a\cdot b=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=2\end{cases}$. Observăm că pentru $a=b=2$ obţinem că $F(x)=(2\cdot x+1)\cdot e^{2\cdot x+2}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, funcţie care verifică relaţia $F'(x)=f(x)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Răspuns: $a=b=2$.	**2p**

	b) Mai întâi calculăm $I=\int\sqrt{4-x^2}\,dx$, pentru $x\in(-2;2)$. Avem că $I=\int\sqrt{4-x^2}\,dx=\int\frac{4-x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx=4\cdot\int\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx+\int\frac{-x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx=$ $4\cdot\arcsin\frac{x}{2}+\int x\cdot\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}dx=$ $=4\cdot\arcsin\frac{x}{2}+\int x\cdot\left(\sqrt{4-x^2}\right)'dx=4\cdot\arcsin\frac{x}{2}+x\cdot\sqrt{4-x^2}-\int\sqrt{4-x^2}\,dx=4\cdot$ ar . Deci, $I=\int\sqrt{4-x^2}\,dx=2\cdot\arcsin\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\cdot x\cdot\sqrt{4-x^2}+c$, unde $c\in\mathbb{R}$ şi $x\in(-2;2)$.	**2p**
	Funcţia $f:[-2;2]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{4-x^2}$ este continuă, deci admite primitive. Notăm cu $F:[-2;2]\to\mathbb{R}$ o primitivă a lui f. Mai sus am determinat primitivele funcţiei f pe intervalul $(-2;2)$ şi am obţinut că $F(x)=2\cdot\arcsin\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\cdot x\cdot\sqrt{4-x^2}+c$, pentru orice $x\in(-2;2)$, unde $c\in\mathbb{R}$. Deoarece F este derivabilă pe $[-2;2]$, rezultă că F este continuă pe $[-2;2]$. Obţinem că $F(2)=\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}}F(x)=\pi+c$ şi $F(-2)=\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}}F(x)=-\pi+c$. Prin urmare, primitivele funcţiei f sunt de forma $F:[-2;2]\to\mathbb{R}$ şi $F(x)=2\cdot\arcsin\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\cdot x\cdot\sqrt{4-x^2}+c$, pentru orice $x\in[-2;2]$.	**1p**

<table>
<tr>
<td rowspan="2">2.</td>
<td>Fie $p, q \in \mathbb{R}$ şi funcţiile
$$f_p, f_q : E \to E,\ f_p(x, y) = \left(x + p \cdot y + \frac{p^2}{2},\ y + p\right),\ f_q(x; y) = \left(x + q \cdot y + \frac{q^2}{2},\ y + q\right).$$
Avem că
$$f_p \circ f_q : E \to E,\ \left(f_p \circ f_q\right)(x, y) = f_p\left(f_q(x, y)\right) = f_p\left(x + q \cdot y + \frac{q^2}{2},\ y + q\right) =$$
$$= \left(x + q \cdot y + \frac{q^2}{2} + p \cdot (y + q) + \frac{p^2}{2},\ y + q + p\right) = \left(x + (p + q) \cdot y + \frac{(p + q)^2}{2},\ y\right.$$
, pentru orice $(x; y) \in E$. Prin urmare, $f_p \circ f_q = f_{p+q}$, pentru orice $p, q \in \mathbb{R}$.
a) Ultima relaţie arată că operaţia de compunere a funcţiilor este bine definită pe G. Având în vedere că operaţia de compunere a funcţiilor este asociativă pe mulţimea $F = \{f \mid f : E \to E\}$ şi $G \subset F$, rezultă că operaţia de compunere indusă pe G este asociativă. Mai departe, folosind $f_p \circ f_q = f_{p+q}$, pentru orice $p, q \in \mathbb{R}$, se deduce uşor că operaţia de compunere indusă pe G este comutativă, admite element neutru $e = f_0 \in G$, orice element $f_p \in G$ este simetrizabil (inversabil) şi simetricul lui f_p este $f_{-p} \in G$.</td>
<td>2p

2p</td>
</tr>
<tr>
<td>b) Funcţia $h : G \to \mathbb{R},\ h(f_t) = t$ este bijectivă (se demonstrează uşor) şi $h\left(f_p \circ f_q\right) = h\left(f_{p+q}\right) = p + q = h\left(f_p\right) + h\left(f_q\right)$, pentru orice $p, q \in \mathbb{R}$.
Prin urmare, G este izomorf cu grupul $(\mathbb{R}, +)$, ceea ce trebuia demonstrat.</td>
<td>3p</td>
</tr>
</table>

3.	Înmulţim egalitatea cu e^{-x} şi se obţine: $\left(e^{-x}\cdot f(x)\right)'=e^{-x}\cdot\left(x^2+x+1\right)$. $\int\left(e^{-x}\cdot f(x)\right)'dx=\int e^{-x}\cdot\left(x^2+x+1\right)dx\Leftrightarrow$ $e^{-x}\cdot f(x)=-e^{-x}\cdot\left(x^2+x+1\right)-e^{-x}\cdot(2\cdot x+1)-e^{-x}\cdot 2+C.$ $x=0\Rightarrow f(0)=-1-1-2+C=0\Rightarrow C=4.$ $f(x)=4\cdot e^x-\left(x^2+3\cdot x+4\right),\ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}.$	**1p** **1p** **1p** **1p**
	b). $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4\cdot e^x-\left(x^2+3\cdot x+4\right)}{e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4\cdot e^x-(2\cdot x+3)}{e^x}$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4\cdot e^x-2}{e^x}=4.$	**3p**
4	**a).** Aplicăm Mica teoremă a lui Fermat: dacă $(x,p)=1, x\in\mathbb{Z}\Rightarrow p/x^{p-1}-1\Rightarrow p/x^{4k+2}-1.$ Presupunem că există $x\in\mathbb{Z}_p$ astfel încât $x^2+\hat{1}=\hat{0}\Leftrightarrow x^2=-\hat{1}\Rightarrow x^{2\cdot(2k+1)}=\left(-\hat{1}\right)^{2k+1}\Rightarrow\hat{1}=-\hat{1}(fals).$	**2p**
	b). Presupunem că $(\exists)x,y\in\mathbb{Z}_p^*$ astfel încât $x^2+y^2=\hat{0}\Leftrightarrow\left(xy^{-1}\right)^2+\hat{1}=\hat{0}(fals).$ În concluzie singura soluţie este $x=y=\hat{0}.$	**2p**
	c). Ecuaţia se mai scrie $x^2+y^2=2401\cdot 5.\Leftrightarrow x^2+y^2=7^4\cdot 5.$ Reducând ecuaţia în $\mathbb{Z}_7\Rightarrow x^2+y^2=\hat{0}, x,y\in\mathbb{Z}_7\Rightarrow x=y=\hat{0}.$ Deci $x=7\cdot a,\ y=7\cdot b,\ a,b\in\mathbb{Z}.$ Ecuaţia devine $a^2+b^2=49\cdot 5;$ La fel $a=7m,\ b=7n\Rightarrow m^2+n^2=5\Leftrightarrow$ $(m,n)\in\{(2,1),(2,-1),(-2,1),(-2,-1)(1,2),(-1,2)(1,-2),(-1,-2)\}\Rightarrow$ $(x,y)\in\{(98,49),(08,-49),(-98,49),(-98,-49),\}\cup$ $\{(49,98),(-49,98),(49,-98),(-49,-98)\}.$	**3p**