Olimpiada Nationala de Matematica
Etapa locala- 16.02.2013
Clasa a VII-a

<u>Soluţii şi Barem de corectare:</u>

PROBLEMA 1

2(a+b) număr natural par
2p

$3\sqrt{\overline{ab}}$ număr natural par 1p

$\overline{ab}$ pătrat perfect par 1p

$\overline{ab} \in \{16,36,64\}$ 1p

$3 \mid 2(a+b)$ şi $3 \nmid 2 \Rightarrow 3 \mid (a+b)$ 1p

$\overline{ab}$ = 36

PROBLEMA 3

Prin amplificare cu 2^{n+1} obţinem că $1+\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{2^{n+1}+1}{2^{n+1}}$ şi $\frac{1}{\frac{2^{n+1}+1}{2^{n+1}}}=\frac{2^{n+1}}{2^{n+1}+1}$ de unde

a = $\frac{1}{1-\frac{1}{1+\frac{1}{1-\frac{2^{n+1}}{2^{n+1}+1}}}}$ 1p

Amplificând apoi cu $2^{n+1}+1$ avem $1-\frac{2^{n+1}}{2^{n+1}+1}=\frac{1}{2^{n+1}+1}$

iar $\frac{1}{\frac{1}{2^{n+1}+1}}=2^{n+1}+1$ deci a = $\frac{1}{1-\frac{1}{2^{n+1}+2}}$ 1p

În final obţinem că a = $\frac{2^{n+1}+2}{2^{n+1}+1}$ 1p

Înlocuind pe a, avem că $1-\frac{1}{a}=1-\frac{2^{n+1}+1}{2^{n+1}+2}$, de unde prin amplificare cu $2^{n+1}+2$

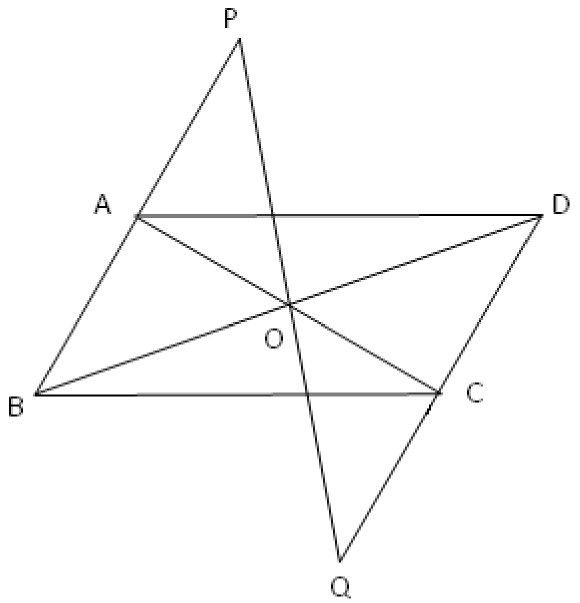
obţinem în final că b = $\sqrt{2^{n+1}+2}$ 1p

Dacă n = 0 atunci b = 2 $\in \mathbb{Q}$ 1p

Dacă n$\neq$ 0 atunci $2 \mid 2^{n+1}+2$ *şi* $4 \nmid 2^{n+1}+2$ deci b $\in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$ 2p

Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

PROBLEMA 2



a)

1p

Patrulaterul APCQ este paralelogram, deci $AP \parallel CQ$ şi $[AP] \equiv [CQ]$ 1p

Punctele P, A şi B sunt coliniare şi $[AP] \equiv [AB]$ de unde obţinem că $AB \parallel CQ$ şi $[AB] \equiv [CQ]$, prin urmare ABQC paralelogram 1p
$AB \parallel CQ$ şi $AB \parallel CD$ deci punctele D, C şi Q sunt coliniare 1p
$AB \parallel DQ$, $AD \nparallel BQ$ (în caz contrar dreptele BQ şi BC ar fi identice în contadicţie cu coliniaritatea punctelor D,C şi Q) $\Longrightarrow$ ABQD – trapez 1p
$AC \parallel BQ$ şi $AB \perp AC \Longrightarrow AB \perp BQ$ de unde ABQD – trapez dreptunghic 1p

b)

Punctul C este mijlocul segmentului [QD] şi obţinem că $\mathcal{A}_{OCQ} = \mathcal{A}_{COD} = \frac{\mathcal{A}_{ACD}}{2}$ 1p
ABCD şi ABQC fiind paralelograme $\Longrightarrow \mathcal{A}_{ABQD} = 3\,\mathcal{A}_{ACD} = 6\,\mathcal{A}_{OCQ}$ 1p

Str. 1 Decembrie nr.5, Cod 420080, Bistrița, Jud. B-N
Tel: +40 (0)263 213529
Fax: +40 (0)263 216654
www.isjbn.ro

Str. 1 Decembrie nr.5, Cod 420080, Bistrița, Jud. B-N
Tel: +40 (0)263 213529
Fax: +40 (0)263 216654
www.isjbn.ro