Barem clasa a X-a
(OLM 2013-etapa locală)

Of. 10 p

Subiectul I.

a) Avem $f(-x)=\dfrac{\dfrac{1}{21^x}+1}{\dfrac{1}{3^x}+\dfrac{1}{7^x}}=\dfrac{1+21^x}{7^x+3^x}=f(x)$, $(\forall)x\in R$. Prin urmare funcția este pară şi deci neinjectivă. **(10 puncte)**

b) Vom arăta că $f(x)\geq 1$, $(\forall)x\in R$. Avem $f(x)\geq 1 \Leftrightarrow \dfrac{21^x+1}{3^x+7^x}\geq 1 \Leftrightarrow (3^x-1)(7^x-1)\geq 0$, inegalitate adevărată pentru orice x număr real. Deci imaginea funcției este $[1,\infty)$ şi deci nu este surjectivă. **(10 puncte)**

c) Cum $f(-x)=f(x)$,avem $2f(x)=1\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{1}{2}$, care nu are soluții, deoarece $f(x)\geq 1$, $(\forall)x\in R$. **(10 puncte)**

Subiectul II.

a) Dacă $x<y$ atunci $x-y<0$. Din $x-\sqrt{y}=y-\sqrt{z}$ atunci $x-y=\sqrt{y}-\sqrt{z}$ şi prin urmare $\sqrt{y}-\sqrt{z}<0$ adică $y<z$. Din $y-\sqrt{z}=z-\sqrt{t}$ atunci $y-z=\sqrt{z}-\sqrt{t}$ şi prin urmare $\sqrt{z}-\sqrt{t}<0$ adică $z<t$. Din $z-\sqrt{t}=t-\sqrt{x}$ atunci $z-t=\sqrt{t}-\sqrt{x}$ şi prin urmare $\sqrt{t}-\sqrt{x}<0$ adică $t<x$. Aşadar avem $x<y<z<t<x$ adică o contradicție. **(10 puncte)**

b) Dacă $x>y$ se procedează după ideea de la punctul a) şi obținem : $x>y>z>t>x$ prin urmare un şir de inegalități care nu poate să aibă loc. Rezultă că $x=y=z=t$ şi avem $x-\sqrt{y}=2\Leftrightarrow x-\sqrt{x}=2\Leftrightarrow x-2=\sqrt{x}$.
Condițiile de existență sunt $\begin{cases} x-2\geq 0 \\ x\geq 0\end{cases}$ adică $x\in[2,+\infty)$. Efectuând calculele se obține ecuația $x^2-5\cdot x+4=0$, ecuație ce admite soluțiile $x_1=1$ şi $x_2=4$. Avănd în vedere că $x\in[2,+\infty)$ rămâne că numai $x=4$ este soluție a ecuației iraționale. Soluția problemei este $x=y=z=t=4$. **(10 puncte)**

Subiectul III. Cum $\dfrac{k^3}{3}+\dfrac{k^3}{3}+\dfrac{k^3}{3}=k^3, k\in N^*$, rezultă că pentru $a=\log_3\dfrac{k^3}{3}, b=\log_5\dfrac{k^3}{3}$ şi $c=\log_7\dfrac{k^3}{3}$, obținem:
$\sqrt[3]{3^a+5^b+7^c}=\sqrt[3]{3^{\log 3\frac{k^3}{3}}+5^{\log 5\frac{k^3}{3}}+7^{\log 7\frac{k^3}{3}}}=\sqrt[3]{\dfrac{k^3}{3}+\dfrac{k^3}{3}+\dfrac{k^3}{3}}=k\in N^*$, de unde rezultă concluzia. **(20 puncte)**

Subiectul IV. **a)** Demonstrarea egalității **(10 puncte)**

b) $x=\dfrac{-\lg a}{-\lg b-\lg c}, y=\dfrac{-\lg b}{-\lg a-\lg c}, z=\dfrac{-\lg c}{-\lg a-\lg b}$. Notăm numitorii acestor fracții cu p>0,q>0,r >0

$\Rightarrow x=\dfrac{-p+q+r}{2p}, y=\dfrac{p-q+r}{2q}, z=\dfrac{p+q-r}{2r}$. Folosind punctul a

$\Rightarrow \dfrac{1}{x+y+2}=\dfrac{2pq}{(p+q+r)(p+q)}\leq\dfrac{p+q}{2(p+q+r)}$ Adunând această inegalitate cu analoagele ei, avem

$\dfrac{1}{x+y+2}+\dfrac{1}{y+z+2}+\dfrac{1}{z+x+2}\leq\dfrac{p+q+q+r+r+p}{2(p+q+r)}=1$ **(10 puncte)**