

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ-16 FEBRUARIE 2013
Clasa a X-a
BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem .

SUBIECTUL I

$z_i \cdot \bar{z}_i = z_i ^2 = r^2 \Rightarrow z_i = \frac{r^2}{\bar{z}_i}, \forall i = \overline{1, 2013}$	2p
Avem $\bar{z} = \left(\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \dots + \bar{z}_{2013} \right) \left(\frac{1}{\bar{z}_1} + \frac{1}{\bar{z}_2} + \dots + \frac{1}{\bar{z}_{2013}} \right) =$	2p
$= \left(\frac{r^2}{z_1} + \frac{r^2}{z_2} + \dots + \frac{r^2}{z_{2013}} \right) \left(\frac{z_1}{r^2} + \frac{z_2}{r^2} + \dots + \frac{z_{2013}}{r^2} \right) =$	1p
$= \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \dots + \frac{1}{z_{2013}} \right) (z_1 + z_2 + \dots + z_{2013}) = z.$	1p
Deci, $\bar{z} = z \Rightarrow z \in \mathbf{R}.$	1p

SUBIECTUL II

Se aplică logaritmul cu baza a subunitară și se obține:	1p
$n \log_a b \geq \log_a x_1 + \log_a x_2 + \dots + \log_a x_n$	2p
Toti logaritmi sunt pozitivi!	
Se aplică inegalitatea mediilor aritmetică și geometrică și se obține	
$n \log_a b \geq \log_a x_1 + \log_a x_2 + \dots + \log_a x_n \geq n \sqrt[n]{\log_a x_1 \log_a x_2 \dots \log_a x_n}$	2p
Simplificăm cu n și ridicăm la puterea n .	2p

SUBIECTUL III

Notăm $B_1 B_2 = l_n$. În $\Delta B_1 A_2 B_2$ avem $B_1 A_2 = a - x$; $A_2 B_2 = x$, $m(\widehat{B_1 A_2 B_2}) = \frac{\pi(n-2)}{n}$.	
$l_n^2 = 4x^2 \sin^2 \frac{\pi}{n} - 4ax \sin^2 \frac{\pi}{n} + a^2.$	2p
Dacă OM este apotema poligonului $OM = \frac{l_n}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}$.	
Fie $f : (0, a) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = A_{[B_1 B_2 \dots B_n]}$	1p
$f(x) = n \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n} x^2 - na \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n} x + \frac{a^2 n}{4} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}$	
Adică o funcție de gradul al doilea care admite minim pentru	2p
$x = \frac{na \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n}}{2n \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n}} = \frac{a}{2}.$	2p

SUBIECTUL IV

a)	$f(x) = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$, deci $a=2$ și $b = -\frac{\pi}{3}$	2p
b)	$A\left(\frac{\pi}{3}, 2\right)$, $B\left(\frac{5\pi}{6}, 0\right)$, $C\left(\frac{4\pi}{3}, -2\right)$ sunt cele trei puncte remarcabile	2p
c)	Demonstrarea injectivității Demonstrarea surjectivității Finalizare	1p 1p 1p