Barem clasa a XI-a
(OLM 2013-etapa locală)

Of. 10 p

Subiectul I. **a)** De exemplu, $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \in M$. **(10 puncte)**

b) Fie $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & a & e \\ f & g & a \end{pmatrix} \in M$. Deoarece produsul elementelor de pe fiecare linie şi fiecare coloană este 1, deducem că $e = f = b$ şi $c = d = g = \frac{1}{ab}$. **(10 puncte)**

Prin urmare $A = \begin{pmatrix} a & b & \frac{1}{ab} \\ \frac{1}{ab} & a & b \\ b & \frac{1}{ab} & a \end{pmatrix}$ şi $\det(A) = \left(a + b + \frac{1}{ab}\right)\left(a^2 + b^2 + \frac{1}{a^2b^2} - ab - \frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$. În condițiile problemei $a + b + \frac{1}{ab} > 0$. Pentru a demonstra că $a^2 + b^2 + \frac{1}{a^2b^2} - ab - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \geq 0$, putem folosi inegalitatea $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$. **(10 puncte)**

Subiectul II.

$$C \cdot (A - B) = A^{-1} \cdot B \Leftrightarrow C \cdot A - C \cdot B - A^{-1} \cdot B = O_4 \,|+I_4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow C \cdot A - C \cdot B - A^{-1} \cdot B + A^{-1} \cdot A = I_4 \Leftrightarrow (C + A^{-1}) \cdot (A - B) = I_4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (A - B) \cdot (C + A^{-1}) = I_4 \Leftrightarrow A \cdot C - B \cdot C - B \cdot A^{-1} + A \cdot A^{-1} = I_4 \Leftrightarrow \Leftrightarrow (A - B) \cdot C = B \cdot A^{-1}.$$ **(20 puncte)**

Subiectul III.

a) Avem $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}, \forall k = \overline{1,n}$. Însumând, rezultă $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq a_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$. Aplicând teorema „cleştelui”, obținem egalitatea cerută. **(10 puncte)**

b)

$$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} - \ldots - \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right) = \lim_{n\to\infty} n^{\alpha}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} n^{\alpha}\left(\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{n\sqrt{n^2+1}}+\frac{\sqrt{n^2+2}-n}{n\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{\sqrt{n^2+n}-n}{n\sqrt{n^2+n}}\right) = \lim_{n\to\infty} n^{\alpha-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{\sqrt{n^2+2}\left(\sqrt{n^2+2}+n\right)}+\ldots+\frac{n}{\sqrt{n^2+n}\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}\right).$$

Fie $\left(c_n\right)_{n\geq 1} : c_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}+\frac{2}{\sqrt{n^2+2}\left(\sqrt{n^2+2}+n\right)}+\ldots+\frac{n}{\sqrt{n^2+n}\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}$.

Deoarece $\frac{k}{\sqrt{n^2+n}\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)} \leq \leq \frac{k}{\sqrt{n^2+k}\left(\sqrt{n^2+k}+n\right)} \leq \frac{k}{\sqrt{n^2+1}\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}, \forall k=\overline{1,n}$,

însumând,rezultă $\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{\sqrt{n^2+n}\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)} \leq \leq c_n \leq \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{\sqrt{n^2+1}\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}$. Aplicând teorema „cleştelui”,

obținem $\lim_{n\to\infty} c_n = \frac{1}{4}$. Prin urmare, $\lim_{n\to\infty} b_n = \begin{cases} \infty, & \text{dacă } \alpha > 1 \\ \frac{1}{4}, & \text{dacă } \alpha = 1 \\ 0, & \text{dacă } \alpha < 1 \end{cases}$. **(10 puncte)**

Subiectul IV

a) $a_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{k+2}{k!\left[1+k+1+(k+1)(k+2)\right]} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!(k+2)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!(k+2)} = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{(k+1)!}-\frac{1}{(k+2)!}\right] = \frac{1}{2}-\frac{1}{(n+2)!}$ $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$.

(10 puncte)

b) Evident $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ şi astfel cu limita cerută ne situăm in cazul 1^{∞}.

$$\lim_{n\to\infty}(2a_n)^{b_n} = \lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{2}{(n+2)!}\right]^{b_n} = e^{\lim_{n\to\infty}\left[-\frac{2}{(n+2)!}\cdot b_n\right]}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{(n+2)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n} k!(k+2)}{(n+2)!} \overset{Stolcz-C}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!(n+3)}{(n+3)!-(n+2)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!(n+3)}{(n+2)!\,(n+2)} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+3)}{(n+2)^2} = 0.$$

Astfel: $\lim_{n\to\infty}(2a_n)^{b_n} = e^0 = 1$ **(10 puncte)**