Barem clasa a VIII-a
(OLM 2013-etapa locală)

Of. 10 p

Subiectul I. Inegalitatea din enunțul problemei se scrie astfel:

$$\sqrt{\frac{1^2+2^2}{2}}+\sqrt{\frac{2^2+3^2}{2}}+\sqrt{\frac{3^2+4^2}{2}}+\ldots+\sqrt{\frac{2n^2+2n+1}{2}}>\frac{n(n+2)}{2},(\forall),n\in N^*.$$

Pornim de la inegalitatea evidentă : $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geq\frac{a+b}{2},(\forall),a,b\in N$,cu egalitate dacă a = b.avem: **(10 puncte)**

$$\sqrt{\frac{1^2+2^2}{2}}+\sqrt{\frac{2^2+3^2}{2}}+\sqrt{\frac{3^2+4^2}{2}}+\ldots+\sqrt{\frac{n^2+(n+1)^2}{2}}>\frac{1+2}{2}+\frac{2+3}{2}+\frac{3+4}{2}+\ldots+\frac{n+n+1}{2}=$$

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\frac{2}{2}+\frac{3}{2}+\frac{3}{2}+\frac{4}{2}+\frac{4}{2}+\ldots+\frac{n}{2}+\frac{n+1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{2(2+3+4+\ldots+n)}{2}+\frac{n+1}{2}=\frac{1}{2}+2+3+4+\ldots+n+\frac{1}{2}+\frac{n}{2}==$$

$1+2+3+4+\ldots+n+\frac{n}{2}=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n}{2}=\frac{n(n+2)}{2}$. De aici urmează că propoziția este adevărată. **(10 puncte)**

Subiectul II.

$p=-4$ şi $\sqrt{7+4\sqrt{3}}-\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}=2+\sqrt{3}-\sqrt{3}+\sqrt{2}+3-\sqrt{2}=5$ **(10 puncte)**

$\frac{5a}{2a-1}\in\mathbb{Z}$ $\quad 2a-1)\mid 5a\Rightarrow(2a-1)\mid 10a\ \Rightarrow a\in\{-2,0,1,3\}$ $\quad A=\{-2,1,3\}$

$-3<2x-1<3$ $\quad B=(-1,2)$ $\quad A\cap B=\{1\}$ **(10 puncte)**

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{24}+\sqrt{25}}=\frac{1-\sqrt{2}}{-1}+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{-1}+\cdots\frac{\sqrt{24}-\sqrt{25}}{-1}=4$$

$4x^2+4x+1=0$ $\quad (2x+1)^2=0$ $\quad x=-\frac{1}{2}$ **(10 puncte)**

Subiectul III. Desen corect **(5 puncte)**

Arătăm că dacă $PN\perp DM$ atunci $DM\perp MC$.

Deoarece $AP\perp(ABC),PN\perp DM,DM\subset(ABC)$, conform reciprocei teoremei celor trei perpendiculare, obținem $AN\perp DM$, iar deoarece *N* este mijlocul segmentului $[DM]$, triunghiul *ADM* este isoscel, de unde $AM=AD=\frac{AB}{2}$. Notăm cu T mijlocul segmentului $[DC]$ şi obținem *AMTD* paralelogram, şi atunci $MT=AD=\frac{AB}{2}=\frac{DC}{2}$

, deci triunghiul *DMC* este dreptunghic în *M*, adică $DM\perp MC$. **(5 puncte)**

Arătăm că dacă $DM\perp MC$ atunci $PN\perp DM$.

Notăm cu T mijlocul segmentului $[DC]$ şi obținem *AMTD* paralelogram, şi atunci *MT = AD.* Cum triunghiul *DMC* este dreptunghic în *M* cu *MT* mediana din vârful unghiului drept, obținem $MT=\frac{DC}{2}=\frac{AB}{2}=AM$ Deci triunghiul *ADM* este isoscel şi atunci $AN\perp DM$, **(5 puncte)**

iar folosind teorema celor trei perpendiculare obținem concluzia dorită. **(5 puncte)**

Subiectul IV. Desen corect **(5 puncte)**

$$\left.\begin{aligned} A_{\Delta AMP} &= \frac{1}{3} A_{\Delta ACP} \\ A_{\Delta ACP} &= \frac{1}{2} A_{\Delta ABC} \end{aligned}\right\} \Rightarrow A_{\Delta AMP} = \frac{1}{6} A_{\Delta ABC}$$ **(5 puncte)**

Aplicăm teorema lui Menelaus

$\Delta ABC, (M, P, N)$ $\quad \dfrac{MA}{MC} \cdot \dfrac{NC}{NB} \cdot \dfrac{PB}{PA} = 1 \Rightarrow NC = 2NB$. (1)

$\Delta DBC, (E, F, G)$ $\quad \dfrac{ED}{EB} \cdot \dfrac{GB}{GC} \cdot \dfrac{FC}{FD} = 1 \Rightarrow GB = 2GC$ (2) **(5 puncte)**

Din (1) şi (2) $\Rightarrow NB = BC = GC$ $\quad A_{\Delta DNG} = 3 \cdot A_{\Delta DBC} = 3 \cdot A_{\Delta ABC}$, deci $A_{\Delta AMP} = \dfrac{1}{18} A_{\Delta DNG}$. **(5 puncte)**