

①. $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \dots 3p$
 $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ și analogele $\dots 2p$

$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9 \dots 1p$

$S = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3 \dots 1p$

$S_{\min} = 3$ se obține pentru $a=b=c=1 \dots 2p$

② a). Calcul direct $\dots 1p$

b). $\sqrt{x^2 + 1006x + 1006^2} = \sqrt{(x+503)^2 + 3 \cdot 503^2} \dots 1p$

$\Rightarrow \sqrt{x^2 + 1006x + 1006^2} > |x+503| \geq x+503 \dots 1p+1p$

Analoagele: $\sqrt{y^2 + 1007y + 1007^2} > y + \frac{1007}{2} \dots 1p$

$\sqrt{z^2 - 2013z + 2013^2} > z - \frac{2013}{2} \dots 1p$

Finalizare $\dots 1p$

③ a) [OM] mediană în $\triangle AOB \Rightarrow OM = \frac{AB}{2}$ și analog $ON = \frac{BC}{2}, OP = \frac{AC}{2} \dots 1p$

[MN] linie mijlocie în $\triangle ABC \Rightarrow MN = \frac{AC}{2}$ și analog $MP = \frac{BC}{2}, NP = \frac{AB}{2} \dots 1p$

$\Rightarrow \triangle OMN \cong \triangle MOP \cong \triangle NPO \cong \triangle PNM$ (LLL) $\dots 1p$

$\triangle NPM \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{A_{\triangle NPM}}{A_{\triangle ABC}} = \frac{1}{4} \dots 1p$

$\Rightarrow A_{\triangle OMN} = A_{\triangle MOP} = A_{\triangle NPO} = A_{\triangle PNM} = \frac{A_{\triangle ABC}}{4}$ și $\dots 1p$

relația se verifică $\dots 1p$

b). Tetraedrul [OMNP] este echifacial (deoarece are toate fețele congruente) și folosim proprietatea cunoscută că distanțele de la vârfuri la fețele opuse sunt congruente $\dots 2p$

④. $d_1 = \sqrt{3}k, d_2 = 2k, d_3 = \sqrt{5}k \dots 1p$

$d_1^2 = a^2 + b^2 = 3k^2, d_2^2 = b^2 + c^2 = 4k^2, d_3^2 = c^2 + a^2 = 5k^2 \dots 1p$

$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = 2d^2 \Rightarrow 2d^2 = 12k^2 \dots 1p$

$k^2 = 6 \dots 1p$

$a^2 + b^2 = 18 \Rightarrow c^2 = 18 \Rightarrow c = 3\sqrt{2} \dots 1p$

$b^2 + c^2 = 24 \Rightarrow a^2 = 12 \Rightarrow a = 2\sqrt{3} \dots 1p$

$c^2 + a^2 = 30 \Rightarrow b^2 = 6 \Rightarrow b = \sqrt{6} \dots 1p$