Barem clasa a IX-a
(OLM 2013-etapa locală)

Of. 10 p

Subiectul I. Dacă a,b,c sunt lungimile laturilor triunghiului ABC,notând $BA' = BC' = x, CB' = CA' = z, AC' = AB' = y$ avem $x + y = c, x + z = a, y + z = b$ de unde prin adunarea celor 3 relații şi înlocuirile corespunzătoare obținem $x = \dfrac{a-b+c}{2}, y = \dfrac{b+c-a}{2}, z = \dfrac{a+b-c}{2}$. **(10 puncte)**

Obținem astfel că $\dfrac{BA'}{CA'} = \dfrac{a-b+c}{a+b-c}$, $\dfrac{BC'}{AC'} = \dfrac{a-b+c}{b+c-a}$ şi $\dfrac{CB'}{AB'} = \dfrac{a+b-c}{b+c-a}$. Folosind vectorii de poziție ,avem

$\overrightarrow{r_{A'}} = \dfrac{a+b-c}{2a}\overrightarrow{r_B} + \dfrac{a-b+c}{2a}\overrightarrow{r_C}$ $\quad \overrightarrow{r_{B'}} = \dfrac{a+b-c}{2b}\overrightarrow{r_A} + \dfrac{b+c-a}{2b}\overrightarrow{r_C}$ $\quad \overrightarrow{r_{C'}} = \dfrac{a-b+c}{2c}\overrightarrow{r_A} + \dfrac{b+c-a}{2c}\overrightarrow{r_B}$ **(10 puncte)**

Din cele 3 relații avem : $2a \cdot \overrightarrow{r_{A'}} + 2b \cdot \overrightarrow{r_{B'}} + 2c \cdot \overrightarrow{r_{C'}} = 2a \cdot \overrightarrow{r_A} + 2b \cdot \overrightarrow{r_B} + 2c \cdot \overrightarrow{r_C}$, adică

$a \cdot \left(\overrightarrow{r_{A'}} - \overrightarrow{r_A}\right) + b \cdot \left(\overrightarrow{r_{B'}} - \overrightarrow{r_B}\right) + c \cdot \left(\overrightarrow{r_{C'}} - \overrightarrow{r_C}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow a \cdot \overrightarrow{AA'} + b \cdot \overrightarrow{BB'} + c \cdot \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$. **(10 puncte)**

Subiectul II.

a).Pentru $1 \le k \le 4n^2$ avem $\sqrt{4n^4} < \sqrt{4n^4 + k} < \sqrt{4n^4 + 4n^2 + 1} \Rightarrow 2n^2 < \sqrt{4n^4 + k} < 2n^2 + 1 \Rightarrow \left[\sqrt{4n^4 + k}\right] = 2n^2$

Pentru $4n^2 + 1 \le k \le 8n^2$ avem

$\sqrt{4n^4 + 4n^2 + 1} \le \sqrt{4n^4 + k} \le \sqrt{4n^4 + 8n^2} < \sqrt{4n^4 + 8n^2 + 4} \Rightarrow 2n^2 + 1 \le \sqrt{4n^4 + k} < 2n^2 + 2 \Rightarrow [\sqrt{4n^4 + k}] = 2n^2 + 1$.

Obținem $a = \sum_{k=1}^{4n^2}[a_k] + \sum_{k=4n^2+1}^{8n^2}[a_k] = 4n^2 \cdot 2n^2 + 4n^2(2n^2 + 1) = 4n^2(4n^2 + 1)$ Numărul a reprezintă produsul a 2 numere naturale, consecutive nenule,deci a nu este pătrat perfect. **(10 puncte)**

b). $a = \sum_{k=1}^{2013}[a_k] = \sum_{k=1}^{4n^2}[a_k] + \sum_{4n^2+1}^{2013}[a_k] = 4n^2 \cdot 2n^2 + (2013 - 4n^2)(2n^2 + 1) = 2n^2 \cdot 2011 + 2013$.

Avem $a - 2013 = 2n^2 \cdot 2011 \Rightarrow 2n^2 \cdot 2011 = 2011 \cdot 800 \Rightarrow n^2 = 400 \Rightarrow n = 20$. **(10 puncte)**

Subiectul III. În rezolvarea exercițiului se ține cont de inegalitatea : $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \ge 2, \forall\, x, y > 0$. **(10 puncte)**

Suma este $= 3 + 335 \cdot \left(\dfrac{y}{x} + \dfrac{z}{x} + \dfrac{x}{y} + \dfrac{z}{y} + \dfrac{x}{z} + \dfrac{y}{z}\right) \ge 3 + 335 \cdot 6 = 2013$ **(10 puncte)**

Subiectul IV.

a) „$\Rightarrow$" Presupunem că $t \notin Z$, atunci $[t] < t$, $[-t] < -t \Rightarrow \{t\} + \{-t\} = (t - [t]) + (-t - [-t]) > 0$, fals.

„$\Leftarrow$" Fie $t \in Z \Rightarrow -t \in Z \Rightarrow \{t\} = 0, \{-t\} = 0 \Rightarrow \{t\} + \{-t\} = 0$ **(10 puncte)**

b) Ecuația dată este echivalentă cu $\left\{\dfrac{-3(x+2)+7}{x+2}\right\} + \left\{\dfrac{2(x+2)-7}{x+2}\right\} = 0$ sau $\left\{-3 + \dfrac{7}{x+2}\right\} + \left\{2 - \dfrac{7}{x+2}\right\} = 0$

sau încă $\left\{\dfrac{7}{x+2}\right\} + \left\{-\dfrac{7}{x+2}\right\} = 0$. Conform punctului a) rezultă $\dfrac{7}{x+2} = k \in Z^*$, de unde $x = \dfrac{7-2k}{k} \in R$,

$k \in Z^*$. Deoarece $x = \dfrac{7-2k}{k} = \dfrac{7}{k} - 2$, rezultă că $x \in Z$ dacă $\dfrac{7}{k} \in Z$ adică pentru $k \in \{\pm 1, \pm 7\}$ ecuația are patru soluții întregi şi anume $x \in \{-9, -3, -1, 5\}$. **(10 puncte)**