BAREM cl. a VII.a

1. a) Din relația dată obținem $b=\frac{a+1}{a-1}\in\mathbb{Z}$ 1p

   deducem că $a-1\mid a+1$ și cum $a-1\mid a-1$ obținem că $a-1\mid 2$ 1p

   Din $a-1\in D_2 \Rightarrow a-1\in\{\pm1,\pm2\}$ și se obțin soluțiile $(2,3),(0,-1),(3,2),(-1,0)$..... 1p

   Soluția $(0,-1)$ nu convine. Finalizare $A=\{1,8,9\}$ 1p

   b) Presupunem că cele două numere ar fi simultan întregi. Obținem:

   $\frac{3n+1}{4}\in\mathbb{Z}\Rightarrow 4\mid 3n+1\Rightarrow 4\mid 5(3n+1)\Rightarrow 4\mid 15n+5$ 1p

   și $\frac{5n-3}{4}\in\mathbb{Z}\Rightarrow 4\mid 5n-3\Rightarrow 4\mid 3(5n-3)\Rightarrow 4\mid 15n-9$ 1p

   Prin urmare: $4\mid(15n+5)-(15n-9)$ și deci $4\mid 14$ - absurd 1p

2. Relația dată se scrie:

   $3\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+4\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+5\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+...+(n+2)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n}\right)$..........2p

   $\frac{3}{1}-\frac{3}{2}+\frac{4}{2}-\frac{4}{3}+\frac{5}{3}-\frac{5}{4}+...+\frac{n+2}{n}-\frac{n+2}{n+1}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n}\right)$ 1p

   Făcând calculele obținem:

   $\frac{3}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n}-\frac{n+2}{n+1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-...-\frac{1}{n}-\frac{n+2}{n+1}=\frac{3}{1}-\frac{n+2}{n+1}$ 1p

   și în final $\frac{2n+1}{n+1}$ 1p

   Dar $\frac{2n+1}{n+1}=\frac{2n+2-1}{n+1}=\frac{2(n+1)-1}{n+1}=\frac{2(n+1)}{n+1}-\frac{1}{n+1}=2-\frac{1}{n+1}$ 1p

   Finalizare 1p

3. a) $\triangle BEP\equiv CDP\Rightarrow\measuredangle BEP\equiv\measuredangle CDP\Rightarrow EB\parallel CD$ 2p

   Din $AB\parallel CD$ (folosind axioma paralelelor) se obține coliniaritatea 1p

   b) Ducem $MS\perp BC$ și $AT\perp BC\Rightarrow$MS linie mijlocie în $\triangle ABT$ 1p

   Notăm $BP=a$ și $MS=h\Rightarrow A_{MBP}=\frac{a\cdot h}{2}$ 1p

   ADCP trapez $\Rightarrow A_{ADCP}=\frac{PC+AD}{2}$ 1p

   $A_{ADCP}=\frac{(a+2a)\cdot AT}{2}=\frac{3a\cdot 2h}{2}=6\cdot\frac{ah}{2}=6\cdot 24=144cm^2$

   ....1p

4. MN mediatoarea segmentului $[AB]$ 1p

   $[PA]\equiv[PB]\Rightarrow\triangle PAB$ isoscel $\Rightarrow\measuredangle PAM\equiv\measuredangle PBM$ 1p

$\triangle PMB$ dreptunghic, $m(\measuredangle PBM)+m(\measuredangle BPM)=90^0 \Rightarrow m(\measuredangle PAM)+m(\measuredangle MBC)=90^0$

$\Rightarrow \triangle ABE$ dreptunghic, $m(\measuredangle AEB)=90^0$ 2p

BCDM paralelogram $\Rightarrow BC \parallel DM$ 2p

Finalizare 1p