COLEGIUL NAȚIONAL DE INFORMATICĂ
Piatra Neamț, Neamț, România, Str. Mihai Viteazu, nr. 12; 610226
Tel/Fax: 00 40 233 227 510; 227 529; 223 252.
http://cni.nt.edu.ro e-mail: cni_pn@yahoo.com

Concurs de matematică – proba individuală

BAREM DE CORECTARE
clasa a XII-a

1. a) Fie legea de compoziție „$\circ$” dată de: $x \circ y = xy + 4(x+y) + 12, x, y \in \mathbb{R}$. Aflați ultimele două cifre ale numărului: $1 \circ 2 \circ 3 \circ \ldots \circ n, n \in \mathbb{N}, n \geq 6$.

b) Fie $(G,\cdot)$ un grup și funcția injectivă $f: G \to G$ care verifică relația $f\big(xf(x^2y)\big) = x^2 f(yx)$, pentru orice $x, y \in G$. Să se arate că $(G,\cdot)$ este grup comutativ.

Alfred Eckstein și Viorel Tudoran, Arad
G.M. nr. 4/2006

Soluție
a)

$x \circ y = (x+4)(y+4) - 4$ este asociativă (**1p**);
$x_1 \circ x_2 \circ \ldots \circ x_n = (x_1+4)(x_2+4)\ldots(x_n+4) - 4$ (**1p**);
$1 \circ 2 \circ 3 \circ \ldots \circ n = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (n+4) - 4$ (**1p**);
ultimele două cifre ale numărului cerut 96 (**1p**).

b)

$x = e, f\big(f(y)\big) = f(y)$ implică $f(y) = y$ (**1p**);
$x^3 y = x^2 yx$ (**1p**);
$xy = yx, \forall x, y \in G$ (**1p**).

2. Fie A un inel cu proprietatea că dacă $x \in A$ și $x^2 = 0$, atunci $x = 0$. Fie $a, b, c \in A$, astfel încât $a = ab, b = bc, c = ca$. Să se arate că $a = b = c$.

Mihai Opincariu, Brad, Hunedoara
G.M. nr. 9/2008

Soluție
$(a-ba)^2 = (a-ba)(a-ba)$ (**1p**);
$(a-ba)^2 = a^2 - (ab)a - baa + b(ab)a$ (**1p**);
$(a-ba)^2 = a^2 - a^2 - ba^2 + ba^2 = 0$ (**1p**);
$a = ba$, deci $ab = ba$ și analogele (**1p**);
$a = ab = a(bc) = (ab)c = ac = ca = c$ (**1p**);
$b = bc = b(ca) = (bc)a = ba = ab = a$ (**1p**);
$a = b = c$ (**1p**).

3. Să se calculeze $\int \frac{\cos x \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{e^{2x} - \cos^2 x} dx$, $x \in (0, \infty)$

Traian Tămîian, Carei
G.M. 4/2012

Soluție Conform inegalităţii Cauchy-Buniakowski-Schwarz

$x > 0, e^{2x} - \cos^2 x > 0$ **(1p);**

$I = \int \frac{\cos x \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{e^{2x} - \cos^2 x} dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{\cos^2 x + \cos x \sin x}{e^{2x} - \cos^2 x} dx$ **(1p);**

$I = \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{\cos^2 x - e^{2x}}{e^{2x}-\cos^2 x}dx + \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{e^{2x}+\cos x \sin x}{e^{2x}-\cos^2 x}dx$ **(2p);**

$I = -\frac{x\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}\int \frac{\left(e^{2x}-\cos^2 x\right)'}{e^{2x}-\cos^2 x}dx$ **(2p);**

$I = -\frac{x\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}\ln(e^{2x} - \cos^2 x) + C$ **(1p).**

4. Fie $f: [0,1] \to [0,1]$ o funcţie continuă. Demonstraţi că:

$$\int_0^1 f(x)dx \cdot \int_0^1 \sqrt{1 - f^2(x)}dx \leq \frac{1}{2}$$

Dinu Teodorescu, Târgovişte
G.M. 9/2005

Soluție Conform inegalităţii Cauchy-Buniakowski-Schwarz

$$A = \left(\int_0^1 \sqrt{1 - f^2(x)}dx\right)^2 = \left(\int_0^1 \sqrt{1 - f(x)} \cdot \sqrt{1 + f(x)}dx\right)^2 \leq$$

$\leq \int_0^1 (1 - f(x))dx \cdot \int_0^1 (1 + f(x))dx = B$ **(2p);**

$B = \left(1 - \int_0^1 f(x)dx\right) \cdot \left(1 + \int_0^1 f(x)dx\right) = 1 - \left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2$ **(2p);**

$1 \geq \left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 + \left(\int_0^1 \sqrt{1 - f^2(x)}dx\right)^2 = C$ **(1p);**

$C \geq 2\left(\int_0^1 f(x)dx\right) \cdot \left(\int_0^1 \sqrt{1 - f^2(x)}dx\right)$ **(1p);**

Concluzia **(1p).**