OLIMPADA DE MATEMATICA

ETAPA LOCALĂ

26 ianuarie 2013

BAREM

CLASA A X-A

Programa TC+CD (4 ore/săpt)

1.)	**Din oficiu**	**1p**
	Presupunem $z_2=0\Rightarrow\|z_2\|=0\Rightarrow\|z_1\|=0\Rightarrow z_1=0$ contradicție deoarece $z_1\neq z_2$ deci $z_2\neq 0$ şi $z_1\neq 0$.	**1p**
	Împărţim egalităţile din enunţ prin $\|z_2\|\neq 0$ și vom obţine: $\left\|\frac{z_1}{z_2}\right\|=\left\|\frac{z_1}{z_2}+1\right\|=1$.	**1p**
	Notăm $\frac{z_1}{z_2}=u\in\mathbb{C}\Rightarrow\ \|u\|=\|u+1\|=1$, $u=a+bi,\quad a,b\in\mathbb{R}\Rightarrow\|a+bi\|=\|a+bi+1\|=1\Leftrightarrow a^2+b^2=(a+1)^2+b^2=1$ $\Rightarrow 2a+1=0\Rightarrow a=-\frac{1}{2},\ b^2=\frac{3}{4}\Rightarrow b=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$	**3p**
	<u>deci</u> $u\in\left\{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$ adică rădăcini cubice ale unităţii, de unde	**2p**
	$u^3=1\Rightarrow u^{3k}=1$, $k\in\mathbb{N}\Rightarrow u^{2013}=1$	**1p**
	$\Rightarrow\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013}=\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^{2013}=1\Rightarrow E=\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013}+\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^{2013}=2$	**1p**

2.)	**Din oficiu**	**1p**
a)	Avem: $\log_a bc=\frac{\lg bc}{\lg a}=\frac{\lg b+\lg c}{\lg a}=\frac{\lg b}{\lg a}+\frac{\lg c}{\lg a}$ Analog $\log_b ca=\frac{\lg c}{\lg b}+\frac{\lg a}{\lg b}$ şi $\log_c ab=\frac{\lg a}{\lg c}+\frac{\lg b}{\lg c}$	**1p**
	Din $a,b,c\in(1,\infty)\Rightarrow\lg a,\ \lg b,\ \lg c>0$	**1p**
	Utilizând inegalitatea: $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2,\ \forall x,y>0$ se obţine: $\log_a bc+\log_b ca+\log_c ab=\frac{\lg b}{\lg a}+\frac{\lg c}{\lg a}+\frac{\lg c}{\lg b}+\frac{\lg a}{\lg b}+\frac{\lg a}{\lg c}+\frac{\lg b}{\lg c}\geq 2+2+2=6$	**2p**
b)	Utilizând inegalitatea mediilor obţinem: $\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\geq\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$	**1p**
	Cum $a>1\Rightarrow\log_a\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\geq\log_a\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=\frac{1}{3}\log_a a^2b^2c^2=\frac{2}{3}\log_a abc=\frac{2}{3}\left(1+\log_a bc\right)$	**1p**
	Analog $b,c>1\Rightarrow\log_b\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\geq\frac{2}{3}\left(1+\log_b ca\right)$ şi $\log_c\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\geq\frac{2}{3}\left(1+\log_c ab\right)$	**1p**

	Însumând inegalităţile obţinute, avem: $\log_a \frac{a^2+b^2+c^2}{3}+\log_b \frac{a^2+b^2+c^2}{3}+\log_c \frac{a^2+b^2+c^2}{3} \geq$ $\frac{2}{3}\left(3+\log_a bc+\log_b ca+\log_c ab\right) \overset{a)}{\geq} \frac{2}{3}(3+6)=6$	2p

3.)	**Din oficiu**	**1p**
a)	Înlocuim în relaţia dată soluţiile ecuaţiei: $x^2-x-1=0,\ x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$,	2p
	Pentru $x_1=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow f\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{1}{2}$, pentru $x_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow f\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{1}{2}$	2p
	Deci există $x_1 \neq x_2$ pentru care $f(x_1)=f(x_2)$ de unde rezultă că funcţia nu este injectivă	1p
b)	Partea dreaptă a egalităţii fiind o expresie de gradul 4, căutăm funcţia sub forma $f(x)=ax^2+bx+c;\ a,b,c\in\mathbb{R}$	1p
	Înlocuind în relaţia dată şi efectuând calculele se obţine: $a=1;\ b=-3;\ c=\frac{3}{2}$	2p
	Se obţine funcţia: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-3x+\frac{3}{2}$	1p

4.	**Din oficiu**	**1p**
a)	$A_0=\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \lvert z_1-z_0\rvert^2+\lvert z_2-z_0\rvert^2=\lvert z_2-z_1\rvert^2$ din care obţinem	1p
	$(2\cos t-1)^2+(2\sin t)^2+(4\cos 2t-1)^2+(4\sin 2t)^2=(4\cos 2t-2\cos t)^2+(4\sin 2t-2\sin t)^2$	1p
	Ecuaţia se reduce astfel: $4\cos 2t-6\cos t-1=0$	1p
	cu soluţiile $\cos t=\frac{5}{4}$ care nu convine şi $\cos t=-\frac{1}{2}$ din care rezultă că $t=\frac{2\pi}{3}$.	1p
b)	$z_n=2^n\left(\cos\frac{2(n+1)\pi}{3}+i\sin\frac{2(n+1)\pi}{3}\right),\ z_{n+1}=2^{n+1}\left(\cos\frac{2(n+2)\pi}{3}+i\sin\frac{2(n+2)\pi}{3}\right),$ $z_{n+2}=2^{n+2}\left(\cos\frac{2(n+3)\pi}{3}+i\sin\frac{2(n+3)\pi}{3}\right)$	1p
	În triunghiul A_nOA_{n+1} avem: $OA_n=2^n$, $OA_{n+1}=2^{n+1}$, $m\left(A_n\hat{O}A_{n+1}\right)=\frac{2\pi}{3}$ de unde rezultă că $A_nA_{n+1}^2=\left(2^n\right)^2+\left(2^{n+1}\right)^2-2\cdot 2^n\cdot 2^{n+1}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=7\cdot 2^{2n}$	1p
	În triunghiul $A_{n+2}OA_{n+1}$ avem: $OA_{n+2}=2^{n+2}$, $OA_{n+1}=2^{n+1}$, $m\left(A_{n+1}\hat{O}A_{n+2}\right)=\frac{2\pi}{3}$ de unde rezultă că $A_{n+2}A_{n+1}^2=\left(2^{n+2}\right)^2+\left(2^{n+1}\right)^2-2\cdot 2^{n+2}\cdot 2^{n+1}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=7\cdot 2^{2n+2}=28\cdot 2^{2n}$	1p
	iar în triunghiul A_nOA_{n+2} avem: $OA_n=2^n$, $OA_{n+2}=2^{n+2}$, $m\left(A_{n+2}\hat{O}A_n\right)=\frac{2\pi}{3}$ de unde rezultă că $A_nA_{n+2}^2=\left(2^n\right)^2+\left(2^{n+2}\right)^2-2\cdot 2^n\cdot 2^{n+2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=21\cdot 2^{2n}$	1p
	Însă $7\cdot 2^{2n}+21\cdot 2^{2n}=28\cdot 2^{2n}$ de unde rezultă că triunghiul $A_nA_{n+1}A_{n+2}$ este dreptunghic în A_n. Astfel $A_{A_nA_{n+1}A_{n+2}}=\frac{A_nA_{n+1}\cdot A_nA_{n+2}}{2}=2^{2n-1}\cdot 7\cdot\sqrt{3}$	1p