

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ**  
– ETAPA PE SECTOR, 09.02.2013 –  
CLASA A X-A

**SUBIECTELE**

**Problema 1.** Să se arate că imaginea funcției  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dată prin

$$f(x) = \sqrt[3]{1+2^x} + \sqrt[3]{1-2^x}$$

este inclusă în intervalul  $(0, 2)$ .

**Problema 2.** Fie  $a, b, x, y$  numere reale din intervalul  $(1, \infty)$ . Să se demonstreze că

$$(\lg x) \cdot (\log_a x) + (\lg y) \cdot (\log_b y) \geq (\lg xy) (\log_{ab} xy).$$

**Problema 3.** Fie  $A, B, C$  trei puncte distincte în planul complex și  $a, b, c$  afixele acestora. Să se arate că triunghiul  $ABC$  este echilateral dacă și numai dacă

$$\frac{a-b}{\bar{a}-\bar{b}} + \frac{b-c}{\bar{b}-\bar{c}} + \frac{c-a}{\bar{c}-\bar{a}} = 0.$$

**Problema 4.** a) Considerăm mulțimea  $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ . Să se arate că funcția  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  dată prin

$$f(z) = z^2 - 2\bar{z}$$

este injectivă.

b) Să se arate că funcția  $g : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$  dată prin

$$g(n) = \text{numărul cuburilor perfecte din intervalul } [n^3, 3n^3]$$

este surjectivă.

*Toate subiectele sunt obligatorii și se notează cu puncte de la 0 la 7  
Timp de lucru: 3 ore*



**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ**  
– ETAPA PE SECTOR, 09.02.2013 –  
CLASA A X-A

**SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE**

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

**Subiectul 1.**

Detalii rezolvare	Barem asociat
Avem de arătat că $0 < \sqrt[3]{1+2^x} + \sqrt[3]{1-2^x} < 2$	<b>2 puncte</b>
$\sqrt[3]{1+2^x} + \sqrt[3]{1-2^x} > 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{1+2^x} > \sqrt[3]{2^x-1} \Leftrightarrow 2^x+1 > 2^x-1$ , evident	<b>2 puncte</b>
$\frac{\sqrt[3]{1+2^x} + \sqrt[3]{1-2^x}}{2^x} < 2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{1+2^x} - 1 < 1 + \frac{\sqrt[3]{2^x-1}}{2^x}$ $\Leftrightarrow \frac{\sqrt[3]{(1+2^x)^2} + \sqrt[3]{1+2^x} + 1}{\sqrt[3]{(2^x-1)^2} - \sqrt[3]{2^x-1} + 1} < \frac{\sqrt[3]{(1+2^x)^2} + \sqrt[3]{1+2^x} + 1}{\sqrt[3]{(2^x-1)^2} - \sqrt[3]{2^x-1} + 1}$ $\Leftrightarrow \sqrt[3]{(1+2^x)^2} + \sqrt[3]{1+2^x} > \sqrt[3]{(2^x-1)^2} - \sqrt[3]{2^x-1}$ – adevărat: $(2^x+1)^2 > (2^x-1)^2$ și $2^x+1 > 1-2^x$	<b>3 puncte</b>

**Subiectul 2.**

Detalii rezolvare	Barem asociat
Inegalitatea este echivalentă cu $\frac{\lg^2 x}{\lg a} + \frac{\lg^2 y}{\lg b} \geq \frac{\lg^2(xy)}{\lg(ab)}$	<b>2 puncte</b>
Aceasta se scrie $\frac{t^2}{\alpha} + \frac{u^2}{\beta} \geq \frac{(t+u)^2}{\alpha+\beta}$ , unde $t, u, \alpha, \beta > 0$	<b>2 puncte</b>
Ea este adevărată, fiind echivalentă cu $(\beta t - \alpha u)^2 \geq 0$	<b>3 puncte</b>

**Subiectul 3.**

Gazeta Matematică nr. 12/2012, prof. *Marian Cucoaneș*, Mărășești

Detalii rezolvare	Barem asociat
Numărul $\frac{a-b}{\bar{a}-\bar{b}}$ are modulul 1 și argumentul $2 \arg(a-b)$	<b>2 puncte</b>
Suma a trei numere complexe de modul 1 este nulă dacă și numai dacă argumentele lor sunt de forma $\alpha, \alpha + 2\pi/3, \alpha + 4\pi/3$	<b>2 puncte</b>
Condiția precedentă se realizează dacă și numai dacă $A = B = \pi/3$ (adică triunghiul $ABC$ este echilateral), deoarece $\arg(b-c) = \arg(a-b) + (\pi - B)$ , $\arg(c-a) = \arg(a-b) + (\pi + A)$ sau $\arg(b-c) = \arg(a-b) - (\pi - B)$ , $\arg(c-a) = \arg(a-b) - (\pi + A)$	<b>3 puncte</b>

**Subiectul 4.**

Prof. *Eugen Radu*, București

Detalii rezolvare	Barem asociat
$f(z) = f(y) \Leftrightarrow z^2 - y^2 = 2(\bar{z} - \bar{y})$	<b>1 punct</b>
Luând module reiese $ z-y ( z+y -2) = 0$	<b>1 puncte</b>
În cazul $ z-y  = 0$ obținem $z = y$ , iar în cazul $ z+y  = 2 \geq  z  +  y $ obținem $ z  =  y  = 1$ și $z = xy, x \in \mathbb{R}_+$ , deci, în toate cazurile, $f(y) = f(z)$ implică $y = z$	<b>2 puncte</b>
$g(n) = [n\sqrt[3]{3}] - n + 1$ , deoarece cel mai mare cub perfect din intervalul dat este $[n\sqrt[3]{3}]$	<b>1 punct</b>
$g(n+1) - g(n) = [n\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{3}] - [n\sqrt[3]{3}] - 1 \in \{0, 1\}$ arată că șirul $(g(n))_n$ este crescător și diferența oricăror doi termeni consecutivi este cel mult 1, iar $g(n) > n(\sqrt[3]{3} - 1)$ arată că șirul este nemărginit, deci mulțimea valorilor termenilor șirului este $\mathbb{N}^*$	<b>2 puncte</b>