

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA PE SECTOR, 09.02.2013 –
CLASA A XI-A
SUBIECTELE

Problema 1. Se consideră șirurile de numere reale $(a_n)_{n \geq 1}$, $(b_n)_{n \geq 1}$ și $(c_n)_{n \geq 1}$ definite prin

$$a_1 > 0, b_1 > 0, a_{n+1} = a_n + 2b_n, b_{n+1} = a_n + b_n, c_n = \frac{a_n}{b_n}$$

oricare ar fi n natural nenul.

- a) Să se arate că $|c_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2} |c_n - \sqrt{2}|$, oricare ar fi n natural nenul.
b) Să se arate că dacă șirul $(c_n)_{n \geq 1}$ este monoton, atunci el este constant.

Problema 2. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere reale și $A_n = \max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

- a) Să se studieze convergența șirului $(A_n x_n)_{n \geq 1}$ în cazul

$$a_n = n^2 + n + (-1)^n(n^2 - n), \quad x_n = \frac{1}{na_n}, \forall n \geq 1.$$

b) Să se arate că, dacă $(x_n)_n$ este un șir descrescător astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n x_n = 0$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n x_n = 0$.

Problema 3. a) Să se arate că, dacă n este un număr natural nenul, atunci pentru orice două matrice $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ are loc relația $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$, unde $\text{tr}(X)$ desemnează suma elementelor de pe diagonala principală a matricei pătrate X (urma matricei X).

b) Determinați toate perechile de numere reale (x, y) pentru care există două matrice $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât

$$AB = \begin{pmatrix} x & 60 \\ 2 & y \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad BA = \begin{pmatrix} 10 & 30 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}.$$

Problema 4. Fie a, b, c numere reale strict pozitive și nu toate egale. Să se arate că matricea

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 & c & 0 \\ 0 & a & 0 & c & 0 & b \\ c & 0 & a & 0 & b & 0 \\ 0 & b & 0 & a & 0 & c \\ b & 0 & c & 0 & a & 0 \\ 0 & c & 0 & b & 0 & a \end{pmatrix}$$

este inversabilă.

*Toate subiectele sunt obligatorii și se notează cu puncte de la 0 la 7
Timp de lucru: 3 ore*

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA PE SECTOR, 09.02.2013 –
CLASA A XI-A

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Subiectul 1.

 Prelucrare prof. *Ovidiu Șontea*, București

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) $ c_{n+1} - \sqrt{2} = \left \frac{a_n + 2b_n - a_n\sqrt{2} - b_n\sqrt{2}}{a_n + b_n} \right = (\sqrt{2} - 1) \left \frac{a_n - b_n\sqrt{2}}{a_n + b_n} \right $	2 puncte
$ c_{n+1} - \sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1) \frac{b_n}{a_n + b_n} c_n - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2} c_n - \sqrt{2} $	2 puncte
b) Calculul de la a) arată că dacă $c_n - \sqrt{2} \neq 0$, atunci $c_n - \sqrt{2}$ și $c_{n+1} - \sqrt{2}$ au semne opuse. Astfel, dacă $c_1 - \sqrt{2} \neq 0$, atunci termenii șirului $(c_n)_{n \geq 1}$ se află alternativ de o parte și de cealaltă a lui $\sqrt{2}$, deci șirul nu este monoton; în cazul $c_1 - \sqrt{2} = 0$ șirul este constant (deci monoton)	3 puncte

Subiectul 2.

 Prof. *George Stoica*, Canada

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) $A_n = 2n^2$ pentru n par și $A_n = 2(n-1)^2$ pentru $n > 1$ impar	1 punct
$A_n x_n = 1/n \rightarrow 0$ pentru n par și $A_n x_n = (1 - 1/n)^2 \rightarrow 1$ pentru n impar, deci $(A_n x_n)$ nu este convergent	2 puncte
b) Șirul $(A_n)_n$ este crescător, deci are o limită $l > -\infty$	1 punct
Dacă l este finită, atunci concluzia este evidentă	1 punct
Dacă $l = +\infty$, atunci relațiile $i_1 = 1$, $i_{n+1} = \min\{k \mid a_k > a_{i_n}\}$ definesc un șir strict crescător de numere naturale. În plus, dacă $i_m \leq n < i_{m+1}$, atunci $a_{i_m} = A_{i_m} = A_{i_m+1} = \dots = A_n$. Dacă pentru fiecare $n \geq 1$ considerăm acel unic i_m pentru care $i_m \leq n < i_{m+1}$, obținem $\lim_{n \rightarrow \infty} i_m = \infty$, $A_n x_n = a_{i_m} x_n \leq a_{i_m} x_{i_m}$, iar șirul $(a_{i_m} x_{i_m})_{m \geq 1}$ tinde la 0, fiind un subșir al șirului $(a_n x_n)_{n \geq 1}$. Cum, pe de altă parte, $A_n x_n \geq A_1 x_n$ și $(A_1 x_n)_n \rightarrow 0$, concluzia rezultă imediat	2 puncte

Subiectul 3.

 Prelucrare Gazeta Matematică nr. 12/2012, prof. *Petre Dicu*, Sibiu

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Dacă $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ și $AB = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, atunci $c_{ii} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ki}$	1 punct
Rezultă $\text{tr} AB = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ki} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ik} b_{ki} = \text{tr} BA$	1 punct
b) Din a) reiese $x + y = 30$	1 punct
$\det(AB) = \det(A) \det(B) = \det(BA) \Rightarrow xy = 200$, deci sunt posibile cazurile $(x_1 = 10, y_1 = 20)$ sau $(x_2 = 20, y_2 = 10)$	2 puncte
Se obțin ambele perechi: $A_1 = \begin{pmatrix} 10 & 30 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$, $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$	2 puncte

Subiectul 4.

 Prelucrare prof. *Mihail Bălună*, București

Detalii rezolvare	Barem asociat
Permutarea $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 2 & 5 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ aplicată liniilor și apoi coloanelor transformă determinantul matricei inițiale într-un determinant egal, de forma $D' = \begin{vmatrix} D & O_3 \\ O_3 & D^t \end{vmatrix}$, unde $D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$ și O_3 este matricea nulă	2 puncte
$D' = DD^t = D^2$	2 puncte
$D = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc > 0$, conform inegalității mediilor, deci matricea are determinantul nenul	3 puncte

Observație. Existența inversei se poate argumenta și dovedind că există o matrice X de aceeași formă cu cea inițială, astfel încât $AX = XA = I_6$.