

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
etapa locală – 9 februarie 2013
CLASA A XI-A

Filiera tehnologică – Profilul servicii , resurse naturale și protecția mediului

SUBIECTUL I

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, și funcția

$$f : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R}), \quad f(X) = AX - XA.$$

- Să se calculeze $f(B)$.
- Să se rezolve în $M_2(\mathbb{R})$ ecuația $f(X) = O_2$, unde $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- Să se demonstreze că dacă $C, D \in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât $f(C) = f(D) = O_2$ atunci matricea $C \cdot D$ este soluție a ecuației $f(X) = 0$.

SUBIECTUL II

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)^2$ și determinantul

$$\Delta(x, y, z) = \begin{vmatrix} x^2 & f(x) & f(x+1) \\ y^2 & f(y) & f(y+1) \\ z^2 & f(z) & f(z+1) \end{vmatrix}$$

- Calculați $\Delta(0, 1, -1)$.
- Arătați că $\Delta(x, y, z) = -4(x-y)(y-z)(z-x)$.
- Fie A, B, C trei puncte de pe graficul funcției f având abscisele $a, a+1$, respectiv $a+2$, unde $a \in \mathbb{R}$. Calculați aria triunghiului ABC.

SUBIECTUL III

Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} 2^x - a & \text{dacă } x < 2 \\ \sqrt{x-1} - 1 & \text{dacă } x \geq 2 \end{cases}$

- Aflați parametrul real a astfel încât funcția f să aibe limită în punctul $x = 2$.
- Pentru $a = -1$ să se determine ecuația asimptotei la graficul funcției f spre $-\infty$.
- Pentru $a = 4$ calculați $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{f(x)}{x^2 - 6x + 8} + \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{f(x)}{x^2 - 2x}$.

SUBIECTUL IV

Fie funcția $f : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3}{5} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{\sqrt{(3a-1)^2 x^2 + x + 1}}{5x-3}$, unde $a \in \left(-\infty, \frac{1}{6} \right] \cup \left[\frac{1}{2}, \infty \right)$.

- Determinați ecuația asimptotei verticale la graficul funcției f .
- Determinați $a \in \mathbb{R}$ pentru care $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$.

Notă:

- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Timp de lucru efectiv trei ore.
- Pentru fiecare problemă rezolvată se acordă 7 puncte

Vă dorim succes !

prof. Zeno Blajovan, inspector școlar de specialitate - I.S.J. Timiș