

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ  
"ADOLF HAIMOVICI"  
etapa locală – 9 februarie 2013  
CLASA A XII-A

Filiera tehnologică – Profilul servicii , resurse naturale și protecția mediului

**SUBIECTUL I**

Pe  $\mathbf{R}$  definim legea de compoziție astfel :

$$x * y = \frac{1}{5}(2x + 2y - mxy + 2), \text{ oricare ar fi } x, y \in \mathbf{R} \text{ și } m \in \mathbf{R}.$$

- a) Determinați  $m \in \mathbf{R}$  știind că legea admite element neutru.
- b) Pentru  $m = 3$  demonstrați că  $x * y \in \left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$  pentru orice  $x, y \in \left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$ .
- c) Pentru  $m = 3$  calculați  $\left(-\frac{2012}{2013}\right) * \left(-\frac{2011}{2012}\right) * \dots * \left(-\frac{1}{2}\right) * 0 * \left(\frac{1}{2}\right) * \dots * \left(\frac{2012}{2013}\right)$ , știind că  $\square$  n acest caz legea este asociativă.

**SUBIECTUL II**

$$\text{Fie multimea } G = \left\{ A(x) \mid A(x) = \begin{pmatrix} 2^x & 0 & 2^x \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^x & 0 & 2^x \end{pmatrix}, x \in \mathbf{R} \right\}$$

- a) Arătați că  $A(x) \cdot A(y) \in G$ , pentru orice matrici  $A(x), A(y) \in G$ .
- b) Știind că  $(G, \cdot)$  este grup, determinați simetricul elementului  $A^2(1006)$ .
- c) Demonstrați că funcția  $f : G \rightarrow (0, \infty)$ ,  $f(A(x)) = 2^{x+1}$  este un morfism între grupurile  $(G, \cdot)$  și  $((0, \infty), \cdot)$ .

**SUBIECTUL III**

Se consideră funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2 + mx + 9}{\sqrt{1+x^2}}$ ,  $m \in \mathbf{R}$

- a) Pentru  $m = 2$  calculați  $\int f(x) \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} dx$ , pentru  $x > 0$ .
- b) Pentru  $m = 0$  calculați  $\int \frac{f(x)}{\sqrt{1+x^2}} dx$ .
- c) Determinați parametrii reali  $a, b, m$  astfel încât  $\int \left( f(x) - \frac{b}{\sqrt{1+x^2}} \right) dx = (ax + m)\sqrt{1+x^2} + C$

**SUBIECTUL IV**

Se consideră funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$   $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 3x + 2}{16x + 32} & , x < -2 \\ -2^{2x} \cdot e^{x+2} & , x \geq -2 \end{cases}$ .

- a) Demonstrați că funcția  $f$  admite primitive pe  $\mathbf{R}$ .
- b) Demonstrați că orice primitivă a funcției  $h : (-\infty, -2) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $h(x) = f(x)$ ,  $\forall x \in (-\infty, -2)$  esre strict descrescătoare.
- c) Fie  $g : [-2, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $g(x) = f(x)$ ,  $\forall x \in [-2, \infty)$ . Determinați G o primitivă a funcției  $g$  care verifică relația  $G(0)(1 + 2 \ln 2) - G'(0) = \ln(4e)$ .

Notă:

- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Timp de lucru efectiv trei ore.
- Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte

**Vă dorim succes !**

prof. Zeno Blajovan, inspector școlar de specialitate - I.S.J. Timiș