CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
etapa locală – 9februarie 2013
CLASA A XII-A
Filiera teoretică: profil real, specializarea ştiințe ale naturii

SUBIECTUL I

Pe R definim legea de compoziție astfel :

$x * y = \frac{1}{5}(2x + 2y - mxy + 2)$, oricare ar fi $x, y \in R$ şi fie mulțimea $G = \left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$.

a) Determinați $m \in R$ ştiind că legea admite element neutru..
b) Pentru $m = 3$ demonstrați că $x * y \in G$ pentru orice $x, y \in G$.
c) Ştiind că pentru $m = 3$, $(G,*)$ este grup comutativ determinați în acest caz, parametrii reali a, b astfel încât funcția $f : G \to R, f(x) = ax + b$, să fie izomorfism de grupuri între $(G,*)$ şi grupul multiplicativ al numerelor reale strict pozitive $(R_+^*, \cdot)$.

SUBIECTUL II

Fie multimea G= $\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b, \in R, a \neq -2 \right\}$. Pe G se defineşte legea

$A * B = AB + 2(A + B + I_2), \forall A, B \in G.$

a) Determinați matricea $X \in G$ care verifică relația: $X * I_2 = O_2$.
b) Arătați că mulțimea G este parte stabilă a lui $M_2(R)$ în raport cu legea "$*$" .
c) Arătați că oricare element din G este simetizabil, în raport cu legea $*$.

SUBIECTUL III

Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{3x^2 + mx + 3}{\sqrt{1 + x^2}}$, $m \in R$

a) Pentru $m = 2$ calculați $\int f(x) \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{2x} dx$, pentru $x > 0$.
b) Determinați $m \in \mathbf{R}$ astfel încât orice primitivă a funcției f să fie crescătoare.
c) Determinați parametrii reali a , b , m astfel încât $\int f(x)\,dx = (ax + m)\sqrt{1 + x^2} + b\int \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} dx.$

SUBIECTUL IV

Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 3x + 2}{16\sqrt{x^2 + 4x + 4}} & , x < -2 \\ 2^{2x} \cdot e^{x+2} & , x \geq -2 \end{cases}$.

a) Demonstrați că funcția f admite primitive pe **R**.
b) Dați exemplu de două funcții $g, h : R \to R$ care nu admit primitive , dar pentru care suma lor $g + h$ admite primitive.
c) Determinați F, o primitivă a funcției f , care verifică relația $F(-4) = -\frac{1}{4}$.

Notă:

- *Toate subiectele sunt obligatorii.*
- *Timp de lucru efectiv trei ore.*
- *Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte*

Vă dorim succes !

prof. Zeno Blajovan, inspector şcolar de specialitate - I.S.J. Timiş