OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16.02.2013
CLASA a VIII-a

SUBIECTUL I

a) Fie $x, y, z \in \mathbb{R}$. Arătaţi că:
$$(x+y+z)^2+(x+y-z)^2+(x-y+z)^2+(-x+y+z)^2=4x^2+4y^2+4z^2$$
b) Demonstraţi că numărul $4024^2+4026^2+4028^2$ se poate scrie ca o sumă de patru numere naturale pătrate perfecte.
c) Dacă $a=2^{2013}$, $b=3^{2013}$ *şi* $c=6^{-2013}$, atunci arătaţi că:
$$\frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{ca+c+1}=1.$$

SUBIECTUL al II-lea

a) Să se demonstreze că $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca,\ \forall a,b,c \in \mathbb{R}$.

b) Demonstraţi că $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b} \geq \frac{(x+y)^2}{a+b}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ şi $\forall a, b \in \mathbb{R}_+$.

c) Arătaţi că $\frac{x^3}{y^2(x+2z)}+\frac{y^3}{z^2(y+2x)}+\frac{z^3}{x^2(z+2y)} \geq 1, \forall x, y, z \in \mathbb{R}_+$.

SUBIECTUL al III-lea

Pe planul dreptunghiului $ABCD$ se ridică perpendiculara MA. Distanţele AM, AB şi AD sunt direct proporţionale cu numerele $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, respectiv $\sqrt{6}$, iar distanţa de la punctul M la dreapta BD este egală cu $8\,cm$.

a) Aflaţi măsura unghiului dintre planele (MBD) şi (ABC).

b) Demonstraţi că dreapta BD şi $(MAD)\cap(MBC)$ sunt drepte necoplanare.

c) Aflaţi distanţa de la punctul C la planul (MBD).

SUBIECTUL al IV-lea

În paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ notăm cu M, N, respectiv P, proiecţiile punctului C pe dreptele AB', AD', respectiv $B'D'$. Demonstraţi că:

a) AC', BD' *şi* $A'C$ sunt concurente.
b) $BM \perp AB'$.
c) Dreptele AP, $B'N$ şi $D'M$ sunt concurente.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii şi se notează cu puncte de la 0 la 7.
Timp de lucru: 3 ore.