Olimpiada de matematică
Etapa locală, Caraş-Severin, 16.02.2013

Clasa a IX-a

Problema 1:

a) Daţi un exemplu de patru numere reale nenule şi distincte a, b, c, d pentru care

$$a+b=c+d \text{ şi } a^2+b^2=c^2+d^2.$$

b) Fie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ astfel încât $a+b=c+d$ şi $a^2+b^2=c^2+d^2$.

Arătaţi că, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, este adevărată egalitatea $a^n+b^n=c^n+d^n$.

* * *

Problema 2:

Se consideră numerele reale strict pozitive x, y, z.

a) Arătaţi că: $$\frac{x-\frac{1}{x}}{x+\frac{y+z}{x}} \geq \frac{x-\frac{1}{x}}{x+y+z}$$

b) Dacă, în plus, $x+y+z \geq \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$, demonstraţi că:

$$\frac{x+y+1}{x+y+z^2}+\frac{y+z+1}{y+z+x^2}+\frac{z+x+1}{z+x+y^2} \leq 3.$$

Gazeta Matematică 5 / 2012

Problema 3:

Se consideră un triunghi ABC.

Folosind notaţiile uzuale, arătaţi că $IG \parallel BC$ dacă şi numai dacă $AB+AC=2BC$.

* * *

Problema 4:

Se consideră punctele $A_1, A_2, ..., A_n$ pe un cerc de centru O şi rază 1, cu $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+...+\overrightarrow{OA_n}=\vec{O}$. Demonstraţi că $MA_1+MA_2+...+MA_n \geq n$, oricare ar fi punctul M din planul cercului.

Gazeta Matematică 1 / 2012

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru: 3 ore
Fiecare problemă se punctează cu 7 puncte.