Olimpiada de matematică
Etapa locală, Caraş-Severin, 16.02.2013

CLASA A X-A

Problema 1:

a) Arătaţi că: $\frac{a}{b+1}+\frac{b}{c+1}+\frac{1}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{(a+b+c+1)^2}{2bc+ab+ac+2a+b+c}$, $\forall a,b,c>0$.

b) Detereminaţi numerele $x,y\in(1,\infty)$ pentru care

$$\log_{2y}x+\lg y+\log_{5x}2+\log_{xy}5=2$$

Gazeta Matematică 5 / 2012

Problema 2:

Arătaţi că, dacă $x,y,z\in(0,\infty)$ şi $xyz=1$, atunci: $\frac{1+xy}{1+z}+\frac{1+yz}{1+x}+\frac{1+xz}{1+y}\geq 3$.

RMCS 41

Problema 3:

Fie $a,b,c,d\in\mathbb{C}^*$ afixele vârfurilor unui patrulater convex $ABCD$ în care $a\cdot\overline{c}=\overline{a}\cdot c$, $b\cdot\overline{d}=\overline{b}\cdot d$ şi $a+b+c+d=0$. Arătaţi că $ABCD$ este paralelogram.

RMCS 38

Problema 4:

Determinaţi funcţiile $f,g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că:

$f\left(\frac{x}{3}\right)+2\leq\log_3 x\leq g(x)-1$ şi $g\left(\frac{x}{3}\right)\leq\log_3 x\leq f(x)+1$, oricare ar fi $x\in(0,\infty)$.

Gazeta Matematică 4 / 2012

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru: 3 ore
Fiecare problemă se punctează cu 7 puncte.