



Olimpiada de matematică
Etapa locală, Caraș-Severin, 16.02.2013

Clasa a XI-a

Problema 1:

Fie A, B, C matrice pătratice de ordinul n cu elemente reale astfel încât $AC = C(B + C)$ și $AB + C^2 = I_n$

- Arătați că $(A + \varepsilon C)(B - \varepsilon C) = I_n$, unde ε este rădăcina complexă cubică a unității.
- Demonstrați că $AB = BA$.

Gazeta Matematică 5 / 2012

Problema 2:

- Studiați dacă există un șir $(x_n)_{n \geq 1}$ nemonoton cu $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$.
- Se consideră șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ pentru care $x_n^2 - 2nx_n + n^2 - 1 \leq 0, \forall n \geq 1$. Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n}$.

RMCS 36

Problema 3:

Fie A și B două matrice pătratice de ordinul n cu elemente complexe, cu $\text{rang} A = n - 1$ și $\det(B + A^*) = \det(B - A^*) = 1$. Calculați $\det B$.

Gazeta Matematică 3/2012

Problema 4:

- Dați exemplu de două matrice $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A \neq I_2, B \neq I_2$ cu $AB = I_2$

- Dați exemplu de o matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ cu $B^2 = A$, unde $A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$

- Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ care satisfac $A^2 = B^2 = I_2$ și $\det A = \det B = -1$.

Demonstrați că există $\lambda \in \mathbb{C}$ astfel încât $AB + BA = \lambda I_2$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru: 3 ore

Fiecare problemă se punctează cu 7 puncte.