



Olimpiada de matematică
Etapa locală, Caraș-Severin, 16.02.2013

Clasa a XII-a

Problema 1:

a) Arătați că $\operatorname{arctg} A - \operatorname{arctg} B = \operatorname{arctg} \frac{A - B}{1 + AB}$, $\forall A, B \in \mathbb{R}$.

b) Determinați $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{arctg} \frac{1}{x^2 - x + 1}} dx$.

Gazeta Matematică 1987

Problema 2:

Fie mulțimea $Q_0 = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, m \text{ și } n \text{ impare} \right\}$ și $G = Q_0 \times \mathbb{Z}$. Pe G definim legea de

compoziție $(q_1, k_1) * (q_2, k_2) = (q_1 q_2, k_1 + k_2)$, $\forall q_1, q_2 \in Q_0, \forall k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$. Să se arate că funcția

$f: G \rightarrow \mathbb{Q}^*$, $f((q, k)) = q \cdot 2^k$ este un izomorfism între grupurile $(G, *)$ și (\mathbb{Q}^*, \cdot) , unde " \cdot " este operația de înmulțire a numerelor raționale.

Variante Bac 2009

Problema 3:

Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și F o primitivă a sa cu proprietatea că $e^{x-F(x)} = F(x)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

Calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$.

Gazeta Matematică 2 / 2012

Problema 4:

a) Este posibil ca într-un grup (G, \cdot) să existe exact două elemente distincte $a, b \in G \setminus \{e\}$ astfel încât :

b) Este posibil ca într-un grup (G, \cdot) să existe exact două elemente distincte $a, b \in G \setminus \{e\}$ astfel încât : $ab = ba \neq e$?

* * *

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru: 3 ore

Fiecare problemă se punctează cu 7 puncte.