

S.S.M.R - FILIALA MURES

Olimpiada de matematică
Faza locală 9.02.2013
Clasa a X-a

Problema 1:

Arătați că $a^{\sqrt{\log_a b}} + b^{\sqrt{\log_b a}} \leq a + b$ pentru orice numere $a, b > 1$.

Gazeta matematică

Problema 2:

Fie $p, q \in \mathbb{C}$ și $q \neq 0$. Știind că ecuația $x^2 + px + q = 0$ are rădăcinile cu același modul, să se arate ca $\frac{p^2}{q} \in [0; 4]$.

Problema 3:

Fie $a, b, c, d \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ și $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ astfel încât $a^x = bcd$, $b^y = cda$, $c^z = dab$, $d^t = abc$. Demonstrați că:

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} + \frac{1}{1+t} = 1.$$

Problema 4:

Să se studieze bijectivitatea funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea

$$2f(3-2x) + f(2x-2) = x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Notă.

Toate problemele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se notează cu 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.