

S.S.M.R - FILIALA MURES

**Olimpiada de matematică
Faza locală 9.02.2013
Clasa a XII-a**
Problema 1

Calculați: $\int \frac{1}{x(x^{2012} + 2013)} dx, x > 0.$

*Gazeta matematică***Problema 2**

Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ și mulțimea:

$$G = \left\{ X_a \in M_2(\mathbf{R}) \mid X_a = I_2 + aA, a > -\frac{1}{2} \right\}.$$

a) Arătați că G este parte stabilă a lui $M_2(\mathbf{R})$ în raport cu înmulțirea. Stabiliți, apoi, că (G, \cdot) este grup abelian.

b) Demonstrați că funcția $f: G \rightarrow \mathbf{R}, f(X_a) = \ln(2a+1)$ este izomorfism între grupurile (G, \cdot) și $(\mathbf{R}, +)$.

c) Calculați $X_{\frac{1}{2}} \cdot X_{\frac{3}{2}} \cdot \dots \cdot X_{\frac{2n-1}{2}} (n \in \mathbf{N}^*).$

Problema 3

Calculați: $\int \frac{x+1-x^2 \cdot \ln x}{x^3+x^2} \cdot \cos[\ln(x+1)] dx, x > 0.$

Problema 4

Determinați primitivele funcției $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbf{R}$ primitivabilă, care verifică relația $f(x) \sin x - f(\pi - x) = \cos^2 x, \forall x \in [0, \pi].$

Notă:

Toate problemele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se notează cu 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.