S.S.M.R - FILIALA MURES

Olimpiada de matematică
Faza locală 9.02.2013
Clasa a VIII-a

Subiectul I.

Se dă expresia $E(x)=\frac{x^3-1}{x^3+1}$, $x\in\mathbf{R}\setminus\{-1\}$.

a) Să se arate că: $(k+1)^2-(k+1)+1=k^2+k+1$, $\forall k\in\mathbf{N}$.

b) Arătați că $\frac{3}{2}\cdot E(2)\cdot E(3)\cdot\ldots\cdot E(n)\in(1;2)$, $\forall n\in\mathbf{N}$

Subiectul II.

Fie A, B, C, D puncte necoplanare, $M\in(AB), N\in(BC),\ P\in(CD)$ şi $Q\in(AD)$ astfel încât $\frac{AM}{MB}=\frac{BN}{NC}=\frac{CP}{PD}=\frac{1}{k}$ şi $\frac{AQ}{QD}=\frac{1}{k^3}$, $k\in R_+$. Să se arate că M, N, P şi Q sunt coplanare.

Subiectul III.

Fie $x,z,y\in R_+^*$ numere distincte două câte două, astfel încât $x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{x}$. Arătaţi că $|xyz|=1$

Subiectul IV.

a) Demonstraţi că nu există numere naturale x, y, z pentru care $x+3y+5z=2012$ şi $x^2+y^2+3z^2=2013$.

b) În patrulaterul convex ABCD avem $AC^2+BD^2=AD^2+2AB\cdot CD+BC^2$.

Să se arate că ABCD este trapez sau paralelogram.

(Gazeta matematica 2012)

Notă.

Toate problemele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se notează cu 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.

Propunători: prof. Danciu Alin, prof. Botez Radu, prof. Ginta Vasile, prof. Bálint Attila Sándor