CLASA a V-a

SUBIECTUL 1

Comparaţi numerele: $x = 2^{222} + 2^{202}$ şi $y = 2^{221} + 2^{220} + 2^{212}$.

VARIANTA 1 DE NOTARE:

În baza 2, x are 223 cifre,	**3p**
iar y are 222 cifre,	**3p**
rezultă $x>y$.	**1p**

VARIANTA 2 DE NOTARE:

$x = 2^{212}\cdot 1024 + 2^{202}$,	**3p**
iar $y = 2^{212}(2^9 + 2^8 + 1) = 2^{212}\cdot 769$,	**3p**
rezultă $x>y$.	**1p**

VARIANTA 3 DE NOTARE:

$x = 2^{221} + 2^{221} + 2^{202}$	**3p**
$= 2^{221} + 2^{220} + 2^{220} + 2^{202}$.	**2p**
Cum $2^{220} + 2^{202} > 2^{212}$, rezultă $x>y$.	**2p**

SUBIECTUL 2

Fie numărul $A = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{511}$.

a) Arătaţi că numărul $A + 1$ este divizibil cu 512.

b) Aflaţi restul împărţirii numărului $A - 1$ la 512.

VARIANTA 1 DE NOTARE:

a)

Calculând $2A - A = 2^{512} - 1$, rezultă $A + 1 = 2^{512}$.	**2p**
Cum $512 = 2^9$ şi $A + 1 = 2^{503}\cdot 2^9$, se obţine $A + 1$ este divizibil cu 512.	**1p**

b)

$A - 1 = 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{511}$	**1p**
$= 2 + 2^2 + \ldots + 2^8 + 2^9(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{502})$	**2p**
$= 510 + 512(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{502})$, rezultă restul este 510.	**1p**

VARIANTA 2 DE NOTARE:

a)

$A + 1 = 2 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{511}$	**1p**
$2 + 2 = 2^2$, $2^2 + 2^2 = 2^3$, … , $2^{511} + 2^{511} = 2^{512}$.	**1p**
Cum $512 = 2^9$ şi $A + 1 = 2^{503}\cdot 2^9$, se obţine $A + 1$ este divizibil cu 512.	**1p**

b)

$A - 1 = A + 1 - 2$	**1p**
$= \mathcal{M}_{512} - 2$	**1p**
$= \mathcal{M}_{512} + 510$, rezultă restul este 510.	**2p**

SUBIECTUL 3

a) Daţi un exemplu de triplet (a, b, c), unde a, b, c şi (a + b + c):3 sunt patru pătrate perfecte diferite.

b) Arătaţi că există o infinitate de triplete (a, b, c), unde a, b, c şi (a + b + c):3 sunt patru pătrate perfecte diferite.

a)

Pentru un singur exemplu: (1, 25, 121) sau (25, 49, 289).	**1p**
Calculează (1+25+121):3 = 49 sau (25+49+289):3 = 121, pătrat perfect. Numai pentru unul se acordă cele 2p.	**2p**

b)

Un exemplu de forma $(k^2, 25k^2, 121k^2)$, unde $k\in\mathbb{N}^*$	**2p**
Şi $(k^2 + 25k^2 + 121k^2):3=49k^2=(7k)^2$, arată că există o infinitate de triplete (a, b, c), unde a, b, c şi (a + b + c):3 sunt patru pătrate perfecte diferite.	**2p**

SUBIECTUL 4

a) Aflaţi numerele de forma $\overline{abc}$, ştiind că $\overline{abc}$ împărţit la $\overline{bc}$ dă câtul 3 şi restul 4.

b) Aflaţi numerele de forma $\overline{abcd}$, ştiind că $\overline{abcd}$ împărţit la $\overline{bcd}$ dă câtul 33 şi restul 32.

a)

$\overline{abc} = 3\cdot\overline{bc} + 4$, de unde $100a + \overline{bc} = 3\cdot\overline{bc} + 4$.	**1p**
$100a = 2\cdot\overline{bc} + 4$ sau $50a = \overline{bc} + 2$.	**1p**
Cu soluţiile: $a = 1$, $\overline{bc} = 48$ şi $a = 2$, $\overline{bc} = 98$. Numerele sunt: 148 şi 298.	**1p**

b)

$\overline{abcd} = 33\cdot\overline{bcd} + 32$,	**1p**
de unde $1000a + \overline{bcd} = 33\cdot\overline{bcd} + 32$, apoi $1000a = 32\cdot\overline{bcd} + 32$	**1p**
şi de aici $125a = 4\cdot\overline{bcd} + 4$ sau $125a = 4(\overline{bcd} + 1)$	**1p**
Cu soluţiile: $a = 4$, $\overline{bcd} = 124$ şi $a = 8$, $\overline{bcd} = 249$. Numerele sunt: 4124 şi 8249.	**1p**

<u>**CLASA a VI-a**</u>

SUBIECTUL 1

Determinaţi cel mai mic număr natural n, de patru cifre, ştiind că n − 19 este divizibil cu 28 şi n − 31 este divizibil cu 36.

VARIANTA 1 DE NOTARE:

$n = 28k + 19$ şi $n = 36p + 31$,	**1p**
rezultă $28k + 19 = 36p + 31$,	**1p**
$28k = 36p + 12$; $7k = 9p + 3$.	**1p**
Cea mai mică valoare a lui p pentru care ecuaţia are soluţie este 2 şi atunci $p = 7q + 2$.	**1p**
Se obţine $n = 36(7q + 2) + 31 = 252q + 103$.	**2p**
Cel mai mic număr de patru cifre este 1111.	**1p**

VARIANTA 2 DE NOTARE:

Numerele de forma $28k + 19$ sunt: 19, 47, 75, 103, ….	**2p**
Numerele de forma $36p + 31$ sunt: 31, 67, 103, ….	**2p**
Cum 103 este cel mai mic număr comun ambelor forme, rezultă $n = [28, 36]\cdot q + 103$,	**1p**
$n = 252\cdot q + 103$.	**1p**
Cel mai mic număr de patru cifre este 1111.	**1p**

SUBIECTUL 2

Aflaţi numerele prime a, b, c, ştiind că $a + b = 380$ şi $6a + 15b + 29c = b^4$.

Din a II-a condiţie $6a$ şi $b^4 - 15b$ sunt numere pare, rezultă $29c$ este par,	**2p**
c fiind prim, de unde $c = 2$.	**2p**
După înlocuire şi cu prima relaţie se obţine $2280 + 9b + 58 = b^4$ sau $b(b^3 - 9) = 2338$.	**1p**
$b \mid 2338 = 2\cdot 7\cdot 167$. Singura valoare b, număr prim, care verifică este $b = 7$.	**1p**
Numerele sunt: $a = 373$, $b = 7$, $c = 2$.	**1p**

SUBIECTUL 3

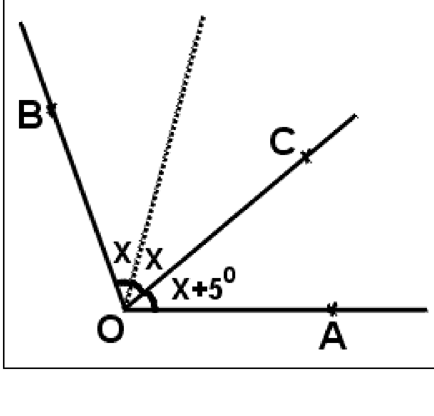
a) **Aflaţi măsura unui unghi, ştiind că măsura complementului său este cu 55^0 mai mică decât două treimi din măsura suplementului său.**

b) **Unghiurile AOB şi BOC sunt neadiacente suplementare. Aflaţi măsurile lor, ştiind că bisectoarea unghiului BOC formează cu [OA un unghi având măsura cu 5^0 mai mare decât măsura unghiului BOC.**

a)

Dacă c reprezintă măsura complementului şi s măsura suplementului unui unghi, atunci $c = s - 90^0$ şi $c = \frac{2}{3}s - 55^0$.	**1p**
Se obţine ecuaţia: $s - 90^0 = \frac{2}{3}s - 55^0$,	**1p**
de unde $\frac{1}{3}s = 35^0$. Rezultă $s = 105^0$ şi de aici măsura unghiului este de $180^0 - 105^0 = 75^0$.	**1p**

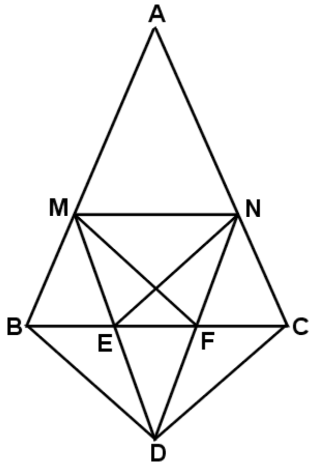
b)



Dacă $m(\sphericalangle BOC) = 2x$, rezultă $m(\sphericalangle AOC) = x + 5^0$	**1p**
şi $m(\sphericalangle AOB) = 3x + 5^0$.	**1p**
Şi cum $m(\sphericalangle AOB) + m(\sphericalangle BOC) = 180^0$, rezultă ecuaţia $3x + 5^0 + 2x = 180^0$.	**1p**
Cu $x = 35^0$. Şi atunci $m(\sphericalangle AOB) = 110^0$ şi $m(\sphericalangle BOC) = 70^0$.	**1p**

SUBIECTUL 4

Triunghiurile isoscele ABC şi DBC au aceeaşi bază [BC] şi interioarele disjuncte.
Dacă $M \in (AB)$, $N \in (AC)$, astfel încât $AM = AN$, iar $MD \cap BC = \{E\}$, $ND \cap BC = \{F\}$, demonstraţi că $ME = NF$ şi $\sphericalangle FMN \equiv \sphericalangle ENM$.

<table>
<tr><td rowspan="5">
</td><td>$\Delta MBD \equiv \Delta NCD$(LUL) $\Rightarrow \sphericalangle BME \equiv \sphericalangle CNF$.</td><td>2p</td></tr>
<tr><td>$\Delta MBE \equiv \Delta CNF$(ULU) $\Rightarrow ME = NF$ şi $BE = CF$.</td><td>2p</td></tr>
<tr><td>$\Delta MBF \equiv \Delta NCE$(LUL) $\Rightarrow \sphericalangle BMF \equiv \sphericalangle CNE$(1),</td><td>1p</td></tr>
<tr><td>dar din $AM = AN$, avem $\sphericalangle AMN \equiv \sphericalangle ANM$(2).</td><td>1p</td></tr>
<tr><td>Din (1) şi (2), rezultă $\sphericalangle FMN \equiv \sphericalangle ENM$.</td><td>1p</td></tr>
</table>

(Variantă: $\Delta MNE \equiv \Delta NMF$(LLL) $\Rightarrow \sphericalangle FMN \equiv \sphericalangle ENM$. Varianta este pentru ultimele 2p).

CLASA a VII-a

SUBIECTUL 1

Rezolvaţi ecuaţia: $\frac{1}{1}\left(\frac{x}{2012}+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2012}+\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2012}+\frac{3}{4}\right)+\ldots+\frac{1}{2012}\left(\frac{x}{2012}+\frac{2012}{2013}\right)=\frac{x}{2013}$.

Ecuaţia este echivalentă cu: $\frac{x}{2012}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2012}\right)+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\ldots+\frac{1}{2013}=\frac{x}{2013}$	**2p**
$\frac{x}{2012}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2012}\right)+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2012}=\frac{x}{2013}-\frac{1}{2013}+1$	**1p**
$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2012}\right)\left(\frac{x}{2012}+1\right)=\frac{x+2012}{2013}$	**1p**
$(x+2012)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2012}-\frac{2012}{2013}\right)=0$	**1p**
$(x+2012)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2012}+\frac{1}{2013}\right)=0$	**1p**
Cum $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2012}+\frac{1}{2013}>0$, rezultă soluţia ecuaţiei este -2012.	**1p**

SUBIECTUL 2

a) **Scrieţi numărul $\frac{1}{2013}$ ca sumă de două fracţii cu numărătorul 1 şi numitori diferiţi.**

b) **Arătaţi că numărul $\frac{1}{2013}$ se scrie ca suma a 2013 fracţii cu numărătorul 1 şi numitori diferiţi.**

VARIANTA 1 DE NOTARE:

a)

$\frac{1}{2013}=\frac{1}{2013}-\frac{1}{2014}+\frac{1}{2014}$	**2p**
$=\frac{1}{2013\cdot 2014}+\frac{1}{2014}$.	**1p**

b)

$\frac{1}{2013}=\frac{1}{2013}-\frac{1}{2014}+\frac{1}{2014}-\frac{1}{2015}+\frac{1}{2015}+\ldots-\frac{1}{4025}+\frac{1}{4025}=$	**2p**
$\frac{1}{2013\cdot 2014}+\frac{1}{2014\cdot 2015}+\ldots+\frac{1}{4024\cdot 4025}+\frac{1}{4025}$.	**2p**

VARIANTA 2 DE NOTARE:

a)

Scrie ecuaţia: $\frac{1}{2013}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ în $\mathbb{N}^*$ şi exprimă o necunoscută în funcţie de cealaltă.	**1p**
Obţinerea unei soluţii.	**2p**

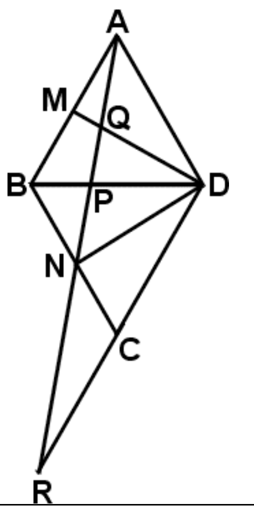
b)

$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{2012\cdot 2013}=\frac{2012}{2013}$, rezultă	**1p**
$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 2012}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 2012}+\ldots+\frac{1}{2012\cdot 2013\cdot 2012}=\frac{1}{2013}$	**2p**
Fiind numai 2012 fracţii, de mai scrie prima ca suma a două: $\frac{1}{4024}=\frac{1}{4024\cdot 4025}+\frac{1}{4025}$	**1p**

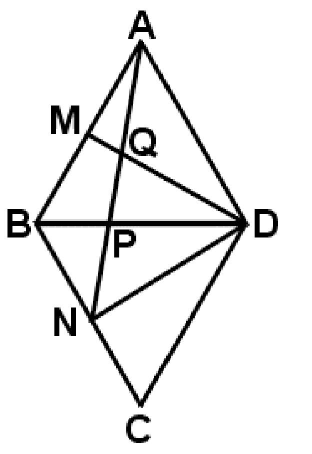
SUBIECTUL 3

În rombul ABCD, $m(\hat{A}) = 60^0$, M şi N sunt mijloacele laturilor [AB], respectiv [BC]. Dacă $AN \cap BD=\{P\}$ şi $AN \cap DM=\{Q\}$, arătaţi că rapoartele $\frac{PQ}{PN}$ şi $\frac{DQ}{DM}$ au aceeaşi valoare şi să se determine această valoare.

VARIANTA 1 DE NOTARE:

	Triunghiurile ABD şi BCD sunt echilaterale, [DP este bisectoare în ΔDNQ şi atunci $\frac{PQ}{PN}=\frac{DQ}{DN}=\frac{DQ}{DM}$.	3p
	Fie $\{R\} = AN \cap DC$. NC ‖ AD şi $NC = \frac{AD}{2}$, rezultă $DR = 2\cdot CD = 4\cdot MA$	1p
	Şi atunci din ΔQMA ~ ΔQDR(AM ‖ DR), rezultă $\frac{DQ}{MQ}=\frac{DR}{MA}=\frac{4MA}{MA}=4$,	2p
	de aici $\frac{DQ}{DM}=\frac{4}{5}$.	1p

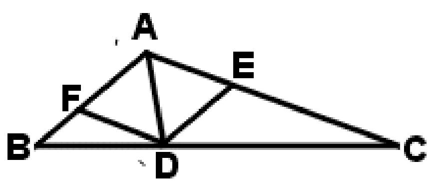
VARIANTA 2 DE NOTARE:

	Triunghiurile ABD şi BCD sunt echilaterale, [DP este bisectoare în ΔDNQ şi atunci $\frac{PQ}{PN}=\frac{DQ}{DN}=\frac{DQ}{DM}$.	3p
	Pentru calculul valorii se poate utiliza şi că P este centru de greutate în ΔABC. $PN = \frac{1}{2}AP$	1p
	şi cu teorema bisectoarei $\frac{PQ}{AQ}=\frac{DP}{AD}=\frac{DP}{BD}=\frac{2}{3}$ (deoarece $\frac{DP}{BP}=\frac{AD}{BN}=2$),	1p
	de unde $\frac{PQ}{AP}=\frac{2}{5}$ sau $PQ = \frac{2}{5}AP$.	1p
	Şi atunci $\frac{PQ}{PN}=\frac{2}{5}\cdot 2=\frac{4}{5}$.	1p

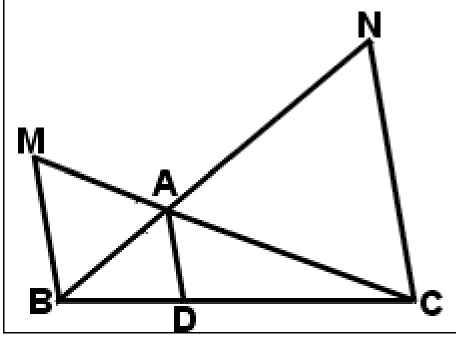
SUBIECTUL 4

În triunghiul ABC, $m(\hat{A}) = 120^0$, AB = 42 cm, AC = 56 cm, iar [AD este bisectoare, $D\in(BC)$.
Aflaţi lungimea segmentului [AD].

VARIANTA 1 DE NOTARE:

	Fie DE ‖ AB, $E\in(AC)$, DF ‖ AC, $F\in(AB)$.	2p
	Patrulaterul AEDF este romb.	1p
	$\frac{DE}{AB}=\frac{DC}{BC}$, $\frac{DF}{AC}=\frac{BD}{BC}$, dă $\frac{DE}{AB}+\frac{DF}{AC}=1$, (sau $\frac{AE}{AC}=\frac{BD}{BC}$, $\frac{AF}{AB}=\frac{DC}{BC}$)	2p
	cum DE = DF = AD, se obţine $AD\left(\frac{1}{42}+\frac{1}{56}\right)=1$,	1p
	de unde AD = 24 cm.	1p

VARIANTA 2 DE NOTARE:

	Fie BM ‖ AD, $M\in AC$ şi CN ‖ AD, $N\in AB$.	2p
	Triunghiurile ABM şi ACN sunt echilaterale de laturi 42, respectiv 56.	1p
	$\frac{AD}{BM}=\frac{DC}{BC}$ şi $\frac{AD}{CN}=\frac{BD}{BC}$,	1p
	rezultă $\frac{AD}{BM}+\frac{AD}{CN}=1$	2p
	şi $\frac{AD}{42}+\frac{AD}{56}=1$, de unde AD = 24 cm.	1p

CLASA a VIII-a

SUBIECTUL 1

Rezolvaţi în numere întregi ecuaţia: $\dfrac{1}{x+y+\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{1}{x+y-\sqrt{x^2+y^2}}=-\dfrac{1}{2}$.

$\dfrac{1}{x+y+\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{1}{x+y-\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{2x+2y}{(x+y)^2-(x^2+y^2)}=\dfrac{2(x+y)}{2xy}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$.	**2p**
Şi atunci ecuaţia devine: $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=-\dfrac{1}{2}$; x şi y numere întregi nenule.	**1p**
$x=-\dfrac{2y}{y+2}$ şi atunci	**1p**
$x=-2+\dfrac{4}{y+2}$	**1p**
de unde $y+2\in\{\pm1; -2; \pm4\}$.	**1p**
Se obţine mulţimea soluţiilor: $S=\{(-6,-3); (-3,-6); (-4,-4); (-1,2); (2,-1)\}$.	**1p**

SUBIECTUL 2

Fie $a\ge b>0$, m_a, m_g media aritmetică, respectiv media geometrică a numerelor a şi b, atunci $\dfrac{m_a}{m_g}+\dfrac{m_g}{m_a}\le\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}$.

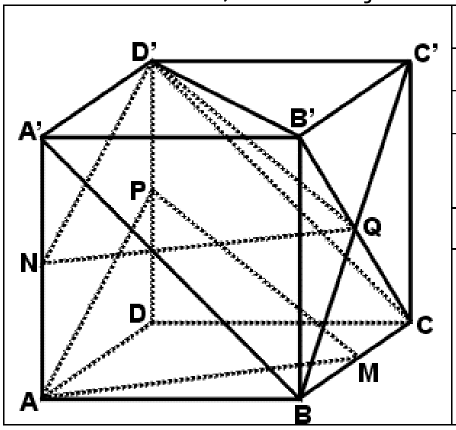
Dacă se notează $\dfrac{m_a}{m_g}=x$	**1p**
şi având $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}=\dfrac{a^2+b^2}{ab}=\dfrac{(a+b)^2-2ab}{ab}=\dfrac{4m_a^2}{m_g^2}-2$	**2p**
se obţine inegalitatea: $x+\dfrac{1}{x}\le 4x^2-2$.	**1p**
Această inegalitate devine: $4x^3-x^2-2x-1\ge 0$	**1p**
sau $(x-1)(4x^2+3x+1)\ge 0$, inegalitate adevărată, deoarece $x\ge 1$ şi $4x^2+3x+1>0$.	**2p**

SUBIECTUL 3

Se consideră cubul ABCDA'B'C'D' şi M, N, P, Q mijloacele segmentelor [BC], [AA'], [DD'], [BC'].

a) Aflaţi măsura unghiului dintre D'Q şi A'B.

b) Demonstraţi că planele (D'NQ) şi (AMP) sunt paralele, iar dacă lungimea muchiei cubului este de 12 cm, determinaţi distanţa dintre ele.



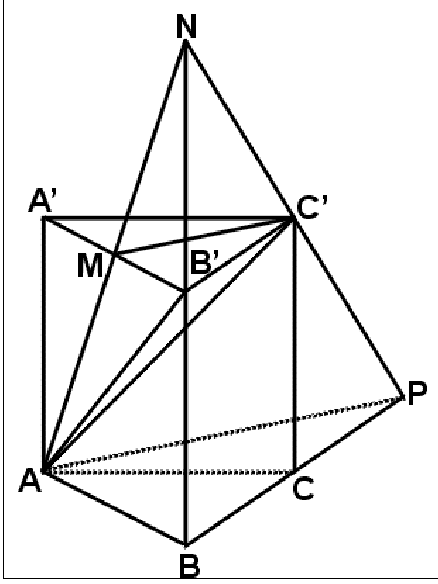
a) A'B || D'C, rezultă $m(\sphericalangle(D'Q, A'B)) = m(\sphericalangle(D'Q, D'C))$.	**1p**
ΔB'D'C fiind echilateral şi Q mijlocul lui [B'C], rezultă $m(\sphericalangle(D'Q, A'B)) = 30^0$.	**2p**
b) AM || NQ, AP || ND' şi $AM \cap AP = \{A\}$, rezultă (AMP) || (D'NQ).	**1p**
Distanţa dintre plane este egală cu distanţa oricărui punct dintr-un plan la celălalt plan.	**1p**
Să luăm d(N, (AMP)). Avem: $\mathcal{A}_{AMP}\cdot d(N, (AMP)) = \mathcal{A}_{ANP}\cdot d(M, (ANP))$.	**1p**
ΔAMP este isoscel de laturi $6\sqrt{5}$, $6\sqrt{5}$, $6\sqrt{6}$, se obţine $\mathcal{A}_{AMP}=18\sqrt{21}$. $18\sqrt{21}\cdot d(N, (AMP)) = 36\cdot 12$, de unde $d(N, (AMP)) = \dfrac{8\sqrt{21}}{7}$.	**1p**

SUBIECTUL 4

În prisma triunghiulară regulată ABCA’B’C’, M este mijlocul segmentului [A’B’], AB = AA’ = 12 cm.

a) Aflaţi distanţa de la punctul B’ la dreapta de intersecţie a planelor (AMC’) şi (ABC).

b) Dacă {N} = BB’ ∩ (AMC’) şi {P} = BC ∩ (AMC’), determinaţi aria triunghiului ANP.

	**a**) AM ∩ BB’={N}, unde BN=24 cm, NC’ ∩ BC={P}, unde BP=24 cm.	**1p**
	În ΔAPC, m(∢C)=120^0 şi AC=PC, rezultă m(∢A) = 30^0 şi atunci m(∢BAP)=90^0.	**1p**
	Cum AP este dreapta de intersecţie a planelor, cu teorema celor trei perpendiculare, rezultă că B’A reprezintă distanţa de la B’ la AP. B’A=$12\sqrt{2}$ cm. (Sau calculând laturile ΔB’AP).	**1p**
	b) NB ⊥ (ABC), BA ⊥ AP, BA, AP ⊂ (ABC), rezultă NA ⊥ AP şi atunci ΔANP este dreptunghic în A. (Sau calculând laturile ΔANP).	**1p**
	AN=$\sqrt{AB^2+BN^2}=\sqrt{12^2+24^2}=12\sqrt{5}$, AP=$\sqrt{BP^2-AB^2}=\sqrt{24^2-12^2}=12\sqrt{3}$	**2p**
	$\mathcal{A}_{ANP}=72\sqrt{15}$.	**1p**